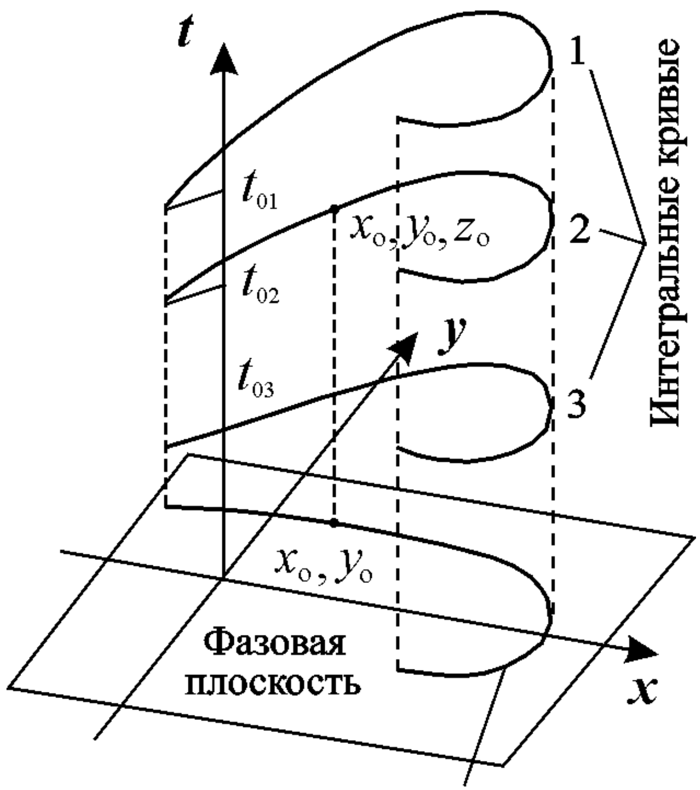
Фазовая плоскость

Качественное исследование

Анализ устойчивости стационарного состояния системы двух автономных дифференциальных уравнений

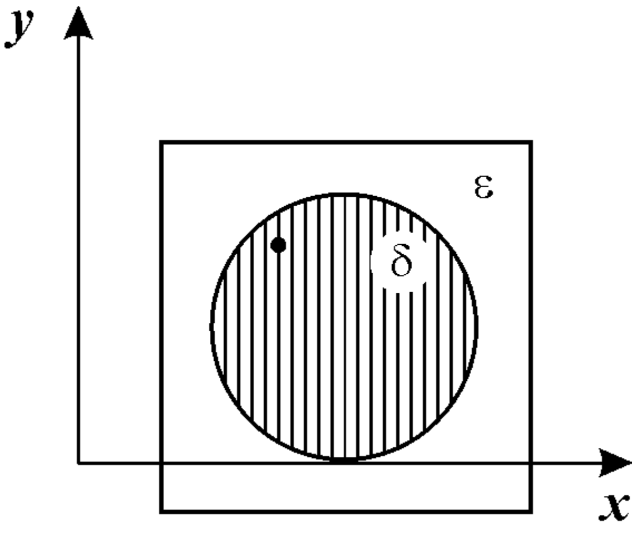
Траектории системы в пространстве (x,y,t)



Жюль Анри Пуанкаре́
(Jules Henri Poincaré)
1854-1912)

Определение устойчивости

- *Состояние равновесия устойчиво, если для любой заданной области отклонений от состояния равновесия (ε) можно указать область $\delta(\varepsilon)$, окружающую состояние равновесия и обладающую тем свойством, что ни одна траектория, которая начинается внутри области δ, никогда не достигнет границы ε.*



Типы устойчивости стационарного состояния

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y),$$
$$\frac{dy}{dt} = Q(x, y).$$

Ляпуно́в Алекса́ндр Миха́йлович (1857 – 1918) – выдающийся русский математик, создал теорию устойчивости состояний равновесия и движения механических систем с конечным числом параметров. Работал также в области дифференциальных уравнений, гидродинамики, теории вероятностей

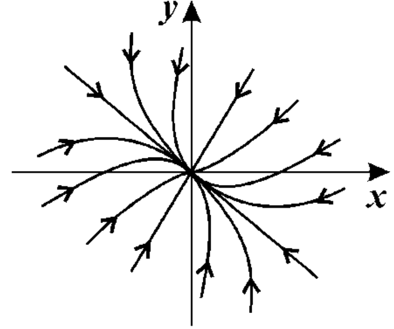
Типы поведения фазовых траекторий в окрестности стационарного состояния для линейной системы

$$\frac{dx}{dt} = ax + by, \quad \frac{dy}{dt} = cx + dy$$

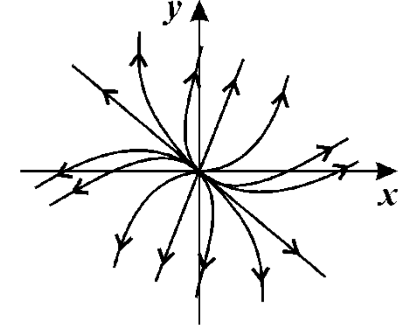
$$x = Ae^{\lambda t}, \quad y = Be^{\lambda t}$$

$$\lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc) = 0$$

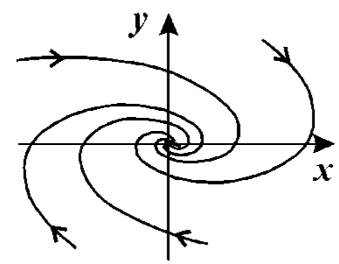
$$\lambda_{1,2} = \frac{a+d}{2} \pm \sqrt{\frac{(a+d)^2 - 4(ad-bc)}{4}}$$



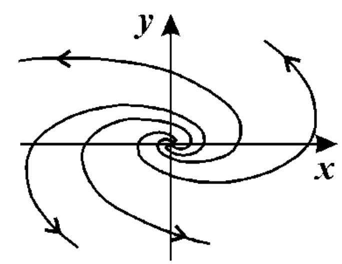
Устойчивый узел.
(λ_1, λ_2 действительны и отрицательны)



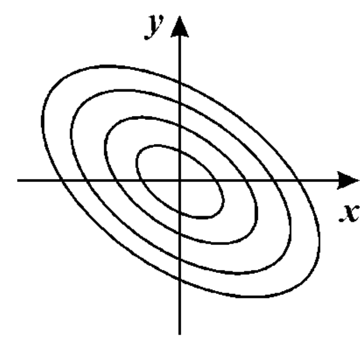
Неустойчивый узел.
(λ_1, λ_2 действительны и положительны)



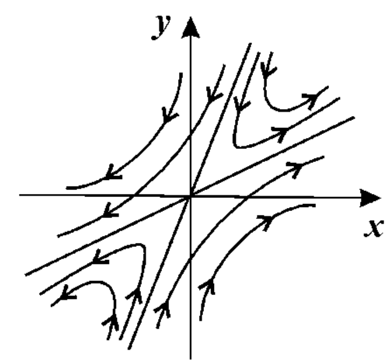
Устойчивый фокус
(λ_1, λ_2 - комплексны, Re $\lambda_{1,2} < 0$)



Неустойчивый фокус
(λ_1, λ_2 - комплексны, Re $\lambda_{1,2} > 0$)



Центр.
(λ_1, λ_2 - чисто мнимые)



Седло.
(λ_1, λ_2 - действительны и разных знаков)

Если *оба корня* имеют ***отрицательную*** *действительную* часть и, следовательно, все решения уравнений первого приближения затухают, то *состояние равновесия* ***устойчиво;***

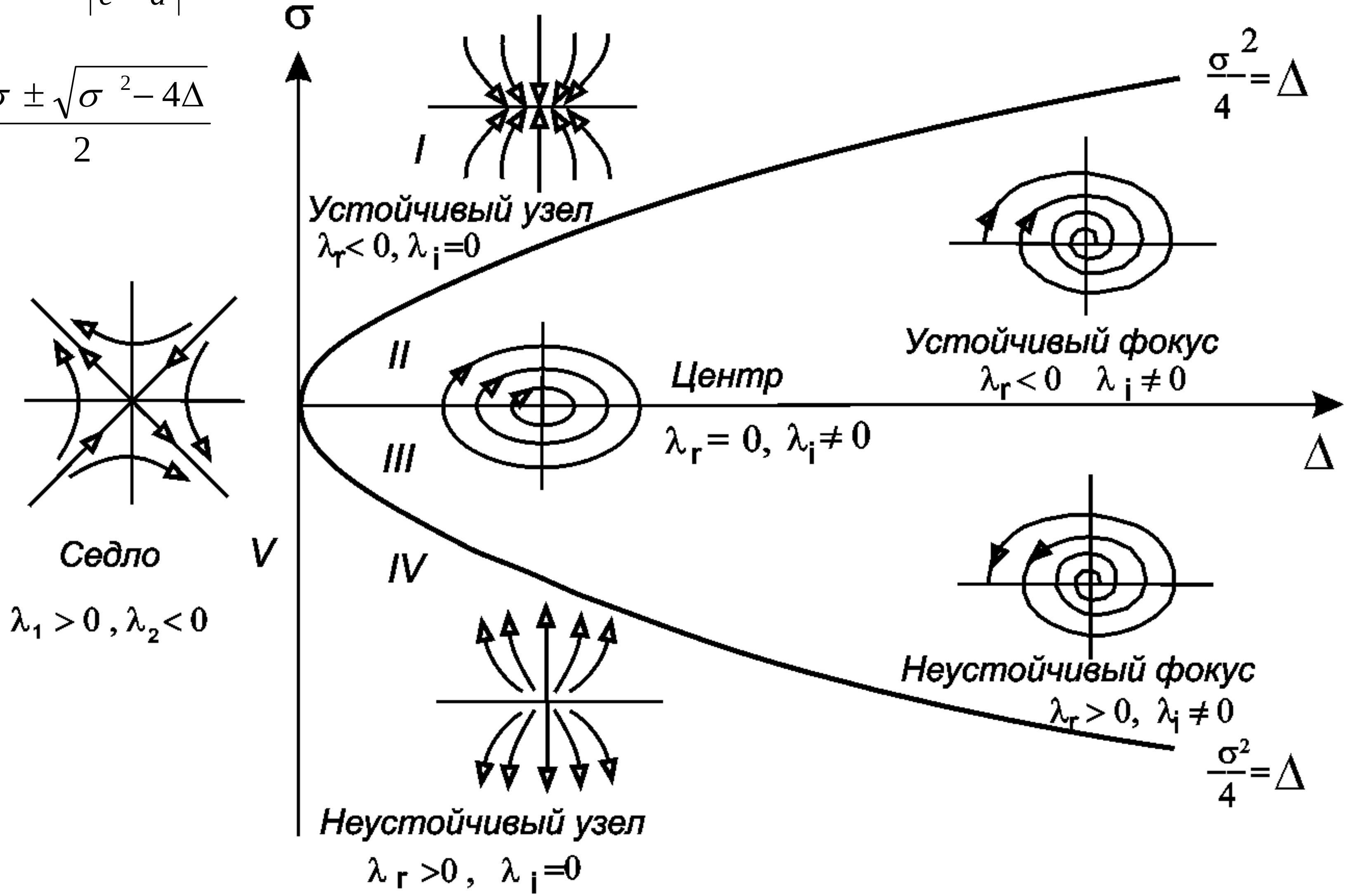
- если *хотя бы один корень* имеет ***положительную*** *действительную часть*, то есть линеаризованная система имеет нарастающие решения, то *состояние равновесия* ***неустойчиво****.*

- Если *действительные части обоих корней* характеристического уравнения *равны нулю* или если *один корень равен нулю*, *а другой отрицателен*, то *уравнения* (5.8) *не дают ответа* на вопрос об *устойчивости состояния равновесия*, и необходимо *рассматривать члены более высокого порядка малости в разложении в ряд Тейлора правых частей уравнений* (5.6).

Бифуркацонная диаграмма

$$\sigma = -(a+d);\ \Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 - 4\Delta}}{2}$$



Линеаризация системы общего вида

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y),$$
$$\frac{dy}{dt} = Q(x, y).$$

$$x = \overline{x} + \xi,$$
$$y = \overline{y} + \eta.$$

Линеаризованная система

$$\frac{d\xi}{dt} = a\xi + b\eta,$$
$$\frac{d\eta}{dt} = c\xi + d\eta.$$

$$a = P_x{}'(\overline{x}, \overline{y}), b = P_y{}'(\overline{x}, \overline{y}),$$
$$c = Q_x{}'(\overline{x}, \overline{y}), d = Q_y{}'(\overline{x}, \overline{y}).$$

Кинетические уравнения Лотки (A.J. Lotka. Elements of Physical Biology, 1925)

$$k_0 \qquad k_1 \leftarrow k_2$$

$$\longrightarrow A \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow B$$

$$\frac{dx}{dt} = k_0 - k_1 xy,$$

$$\frac{dy}{dt} = k_1 xy - k_2 y,$$

$$\frac{dB}{dt} = k_2 y.$$

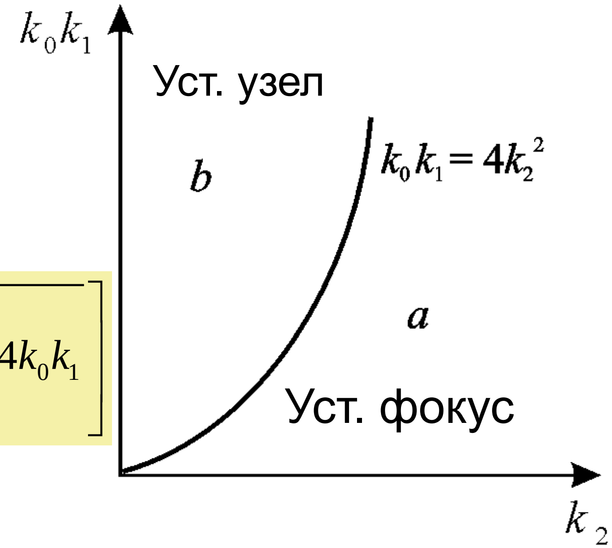
Лотка Альфред Джеймс (англ. *Alfred James Lotka*), 1880 –1949 – американский математик, физик, статистик, демограф. Разработал модели простейших физико-химических реакций. Изучал процесс смены поколений, анализировал процесс демографического развития семьи, заложил основы экономической демографии

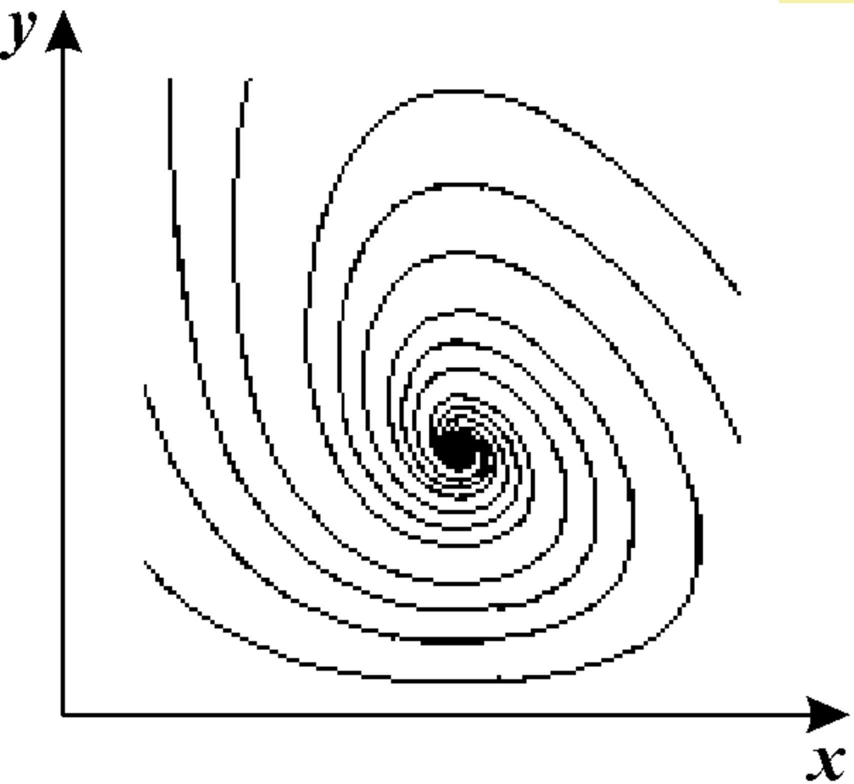
Фазовый портрет системы Лотки
а – устойчивый фокус,

б – устойчивый узел.

$$\frac{dx}{dt} = k_0 - k_1 xy,$$
$$\frac{dy}{dt} = k_1 xy - k_2 y.$$

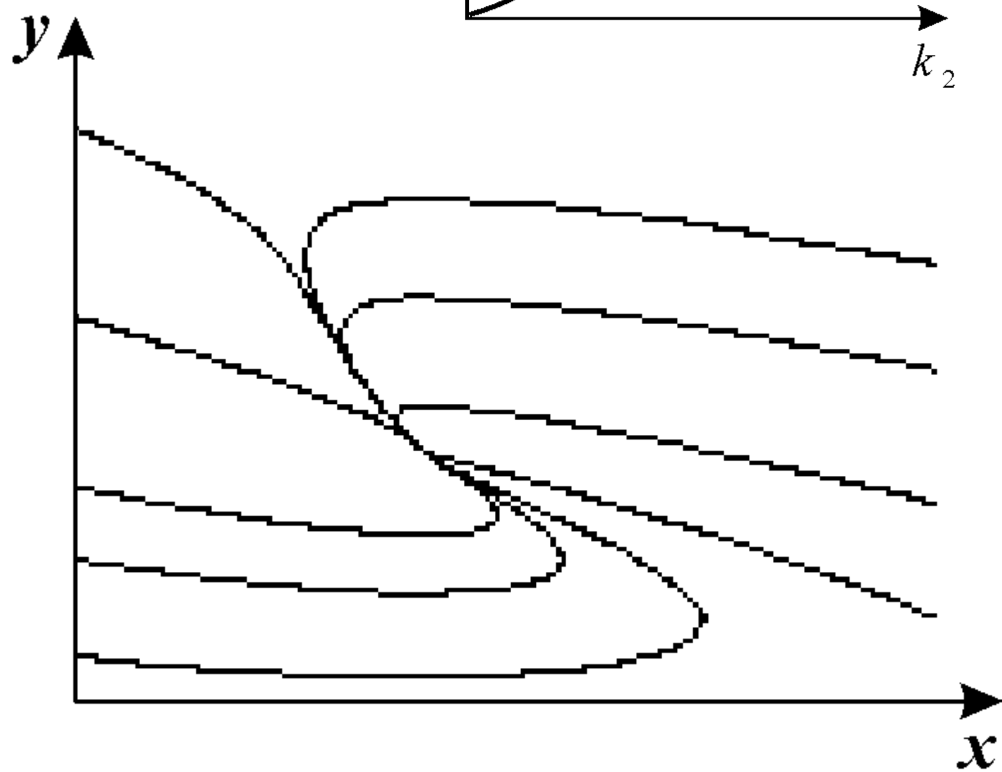
$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2}\left[\frac{k_1 k_0}{k_2} \pm \sqrt{\left(\frac{k_1 k_0}{k_2}\right)^2 - 4k_0 k_1}\right]$$





а

$k_0 = 2, \quad k_1 = 2, \quad k_2 = 2.$



б

$k_0 = 2, \quad k_1 = 10, \quad k_2 = 4.$

Vito Volterra

Модель Вольтерра

$$\frac{dx}{dt} = x(\alpha - \beta y),$$

$$\frac{dy}{dt} = -y(\delta - \gamma x).$$

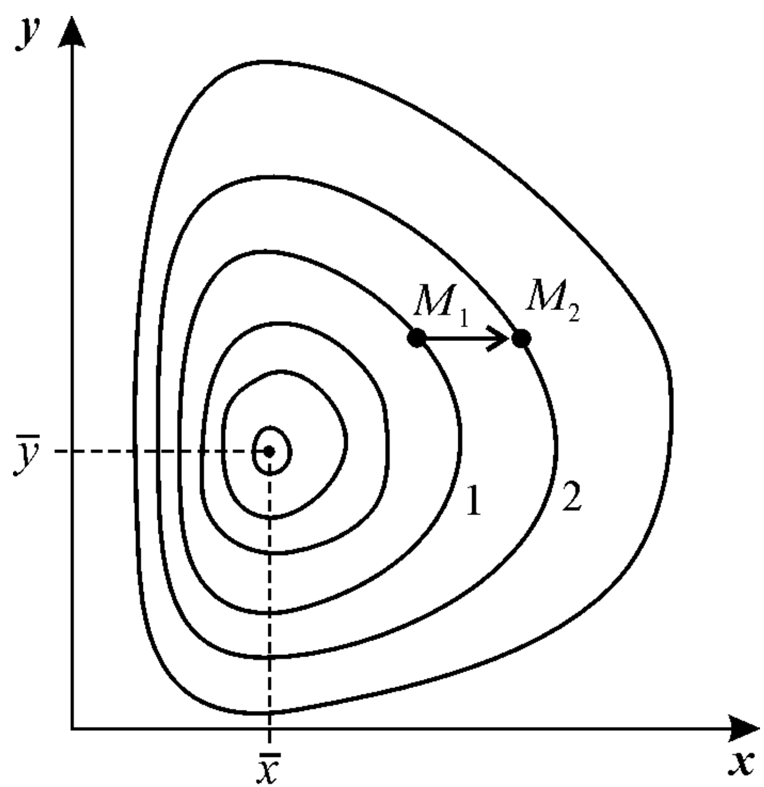
X – численность жертв
Y – численность хищников

Вольтерра Вито (1860 —1940) — выдающийся итальянский математик и физик. Работал в области дифференциальных уравнений с частными производными, теории упругости, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений, функционального анализа. Основатель математической теории популяций.

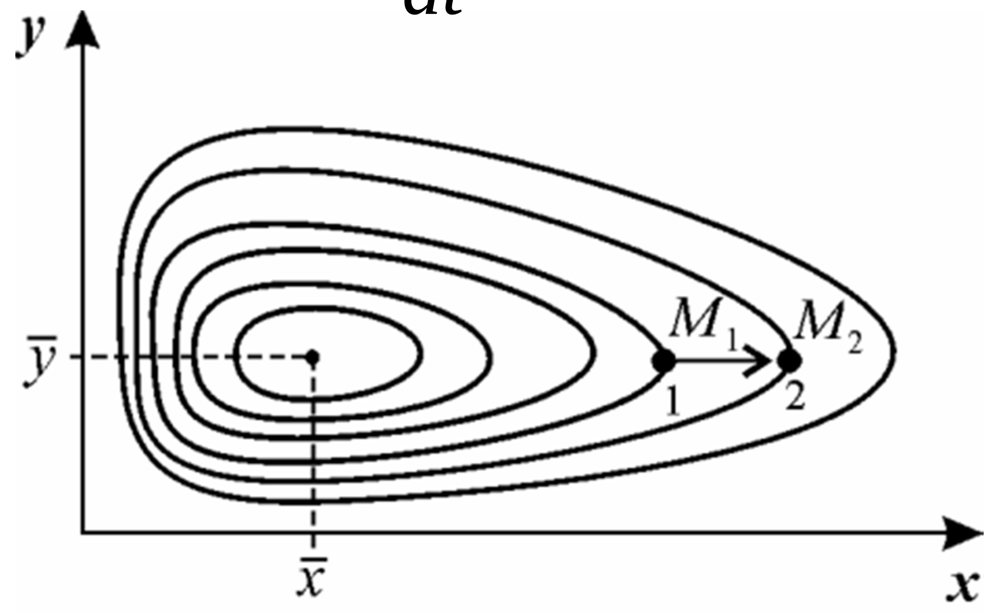
Фазовый портрет модели Вольтерра

$$\frac{dx}{dt} = x(\varepsilon_x - \gamma_{xy} y),$$

$$\frac{dy}{dt} = -y(\varepsilon_y - \gamma_{yx} x).$$



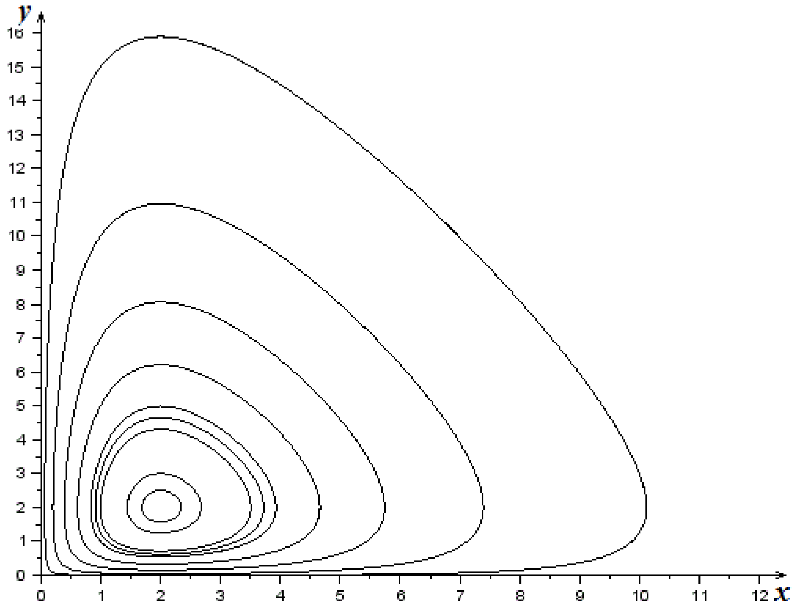
а



б

$\varepsilon_x = 4$, $\gamma_{xy} = 0,3$, $\varepsilon_y = \gamma_{yx} = 0,4$

$\varepsilon_x = 2$, $\gamma_{xy} = 0,3$, $\varepsilon_y = \gamma_{yx} = 0,4$



Volterra predator–prey model describing continuous oscillations of the population numbers.

(a) phase pattern;

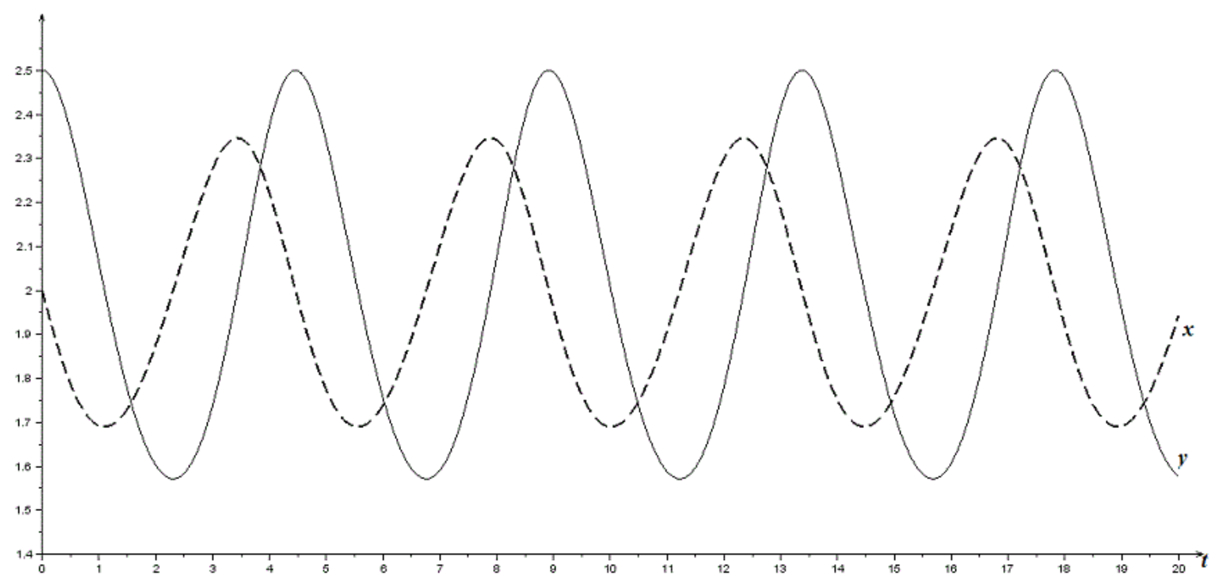
(b) dependence of the numbers of predators and preys on time.

$$\frac{dx}{dt} = ax - bxy$$

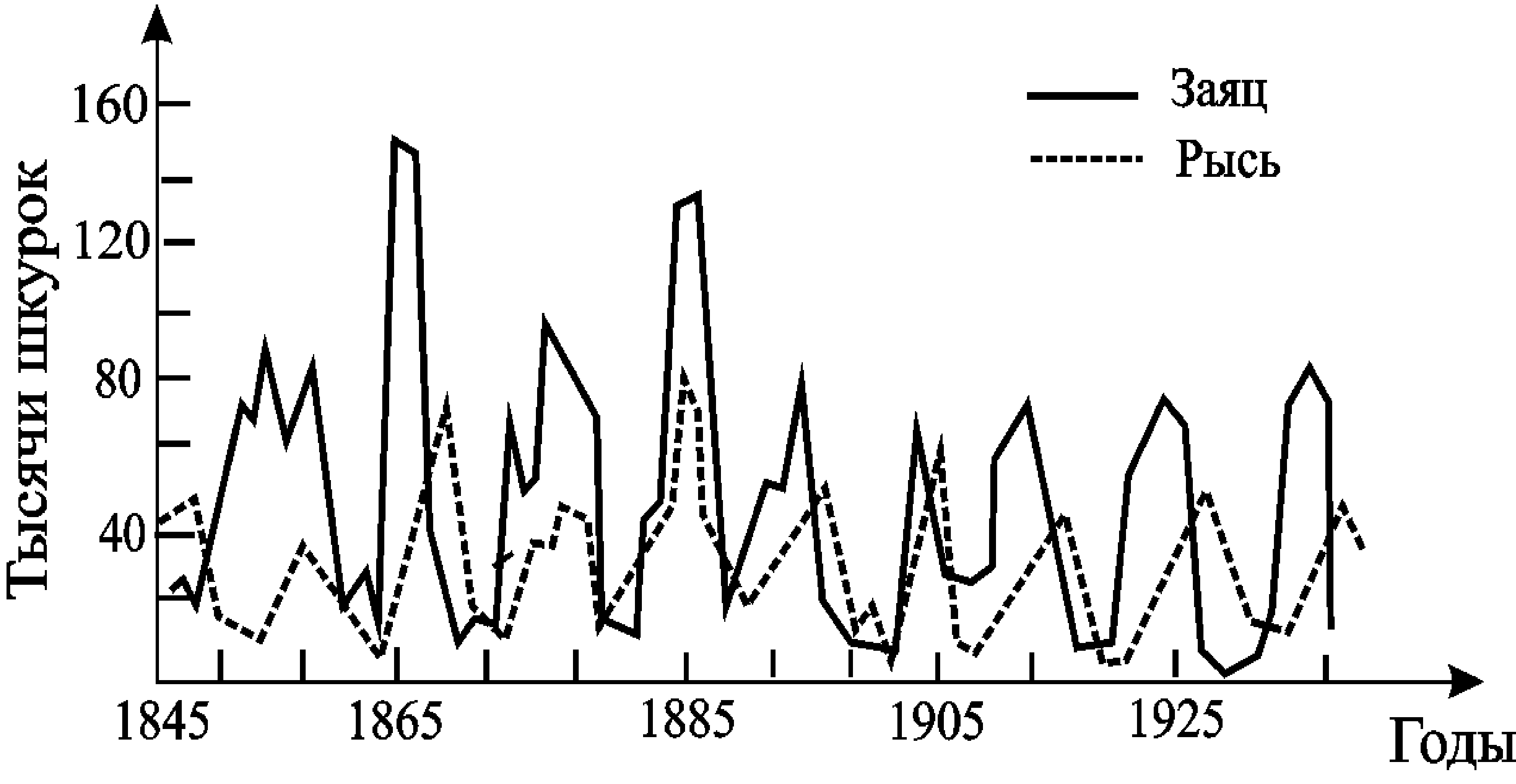
$$\frac{dy}{dt} = cxy - dy$$

$$a = 1;\ b = 0.5;$$

$$c = 1;\ d = 2$$



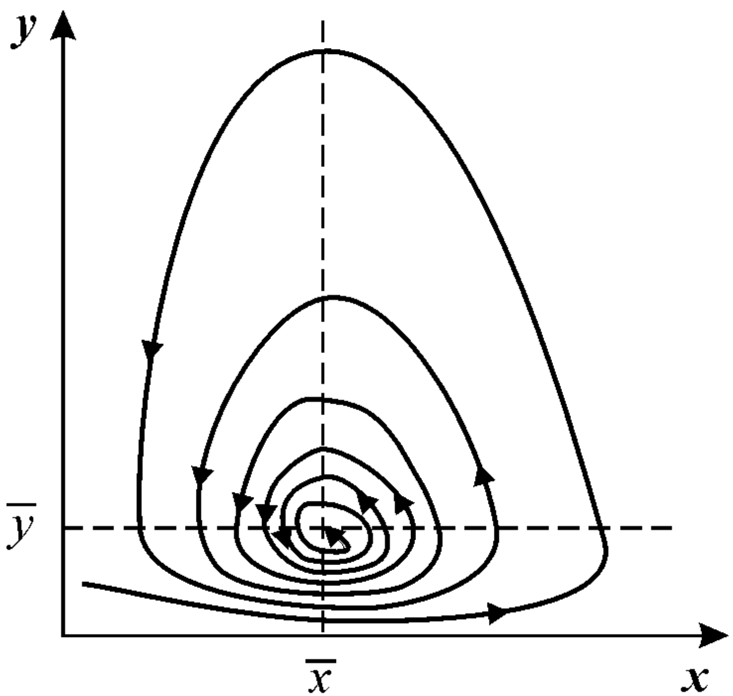
Кривые численности зайца и рыси в Канаде
(по К. Вилли, В. Детье, 1974)



Уравнения Вольтерра с учетом самоограничения численности

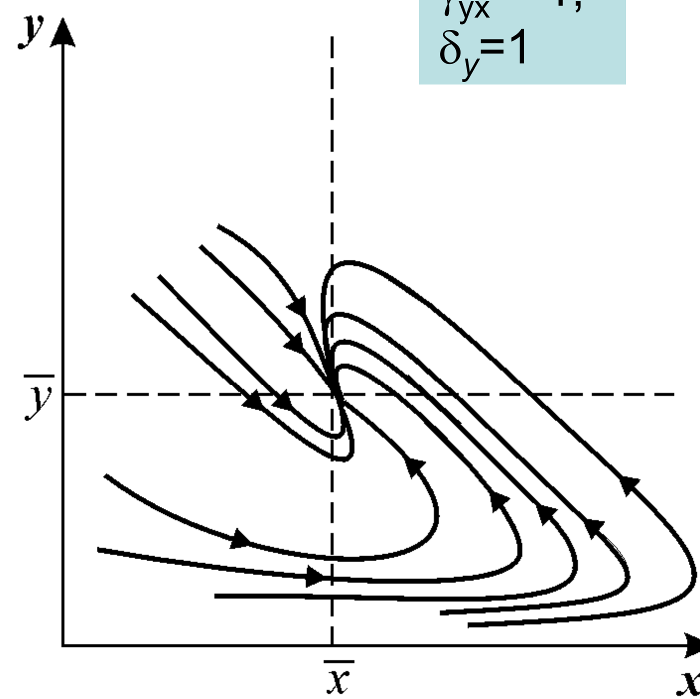
$$\frac{dx}{dt} = x(\varepsilon_x - \gamma_{xy} y - \delta_x x),$$
$$\frac{dy}{dt} = y(\varepsilon_y + \gamma_{yx} x - \delta_y y).$$

$\varepsilon_x = 2$,
$\gamma_{xy} = 18$,
$\delta_x = 1$,
$\varepsilon_y = 3$,
$\gamma_{yx} = 5$,
$\delta_y = 1$



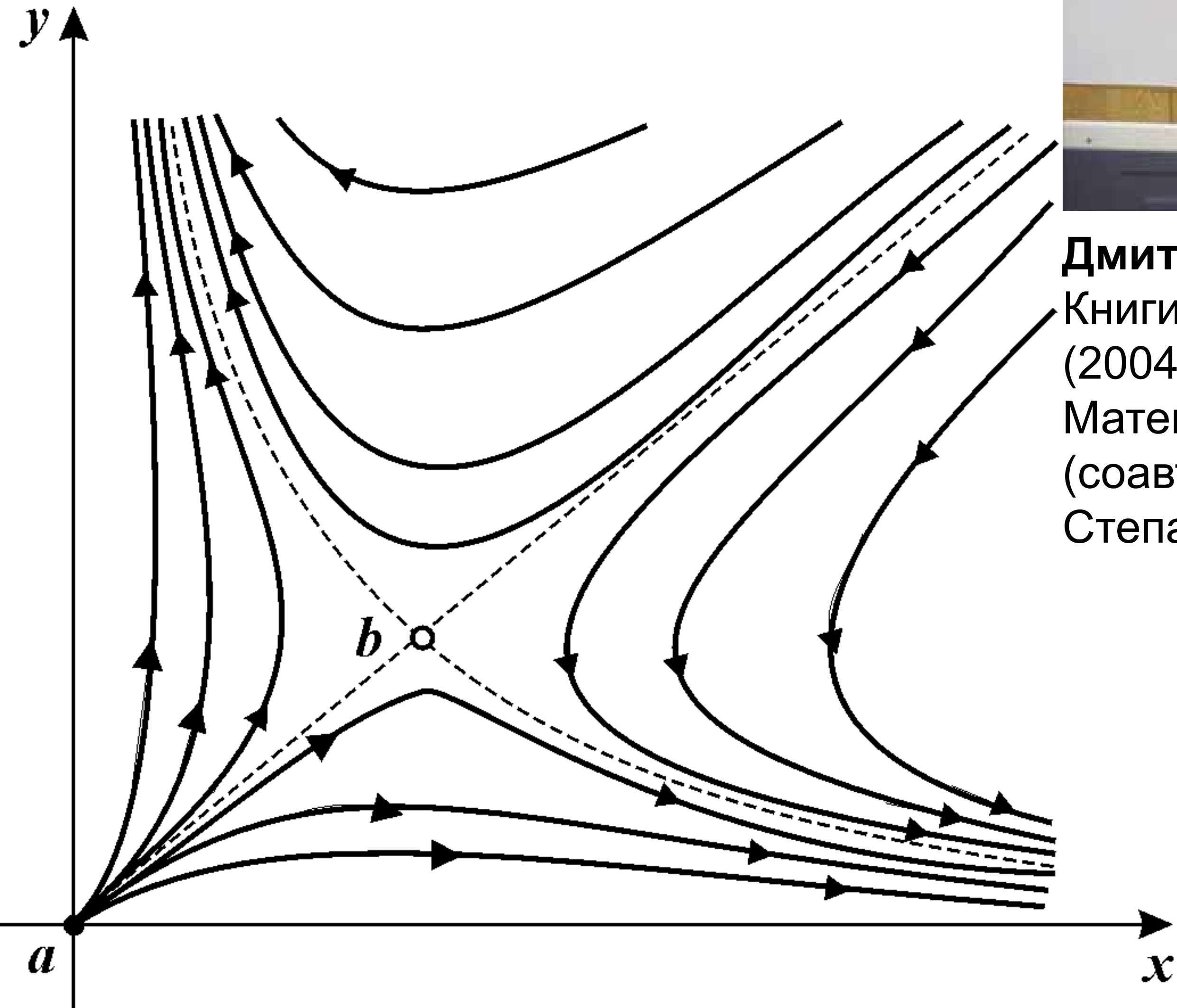
а

$\varepsilon_x = 2$,
$\gamma_{xy} = 1$,
$\delta_x = 1$,
$\varepsilon_y = 3$,
$\gamma_{yx} = 1$,
$\delta_y = 1$



б

Отбор одного из двух равноправных (конкуренция)



Дмитрий Сергеевич Чернавский

Книги: Синергетика и информатика (2004);

Математическая биофизика (соавторы: Романовский, Степанова) 2004

$$\frac{dx}{dt} = ax - \gamma xy;$$

$$\frac{dy}{dt} = ay - \gamma xy.$$

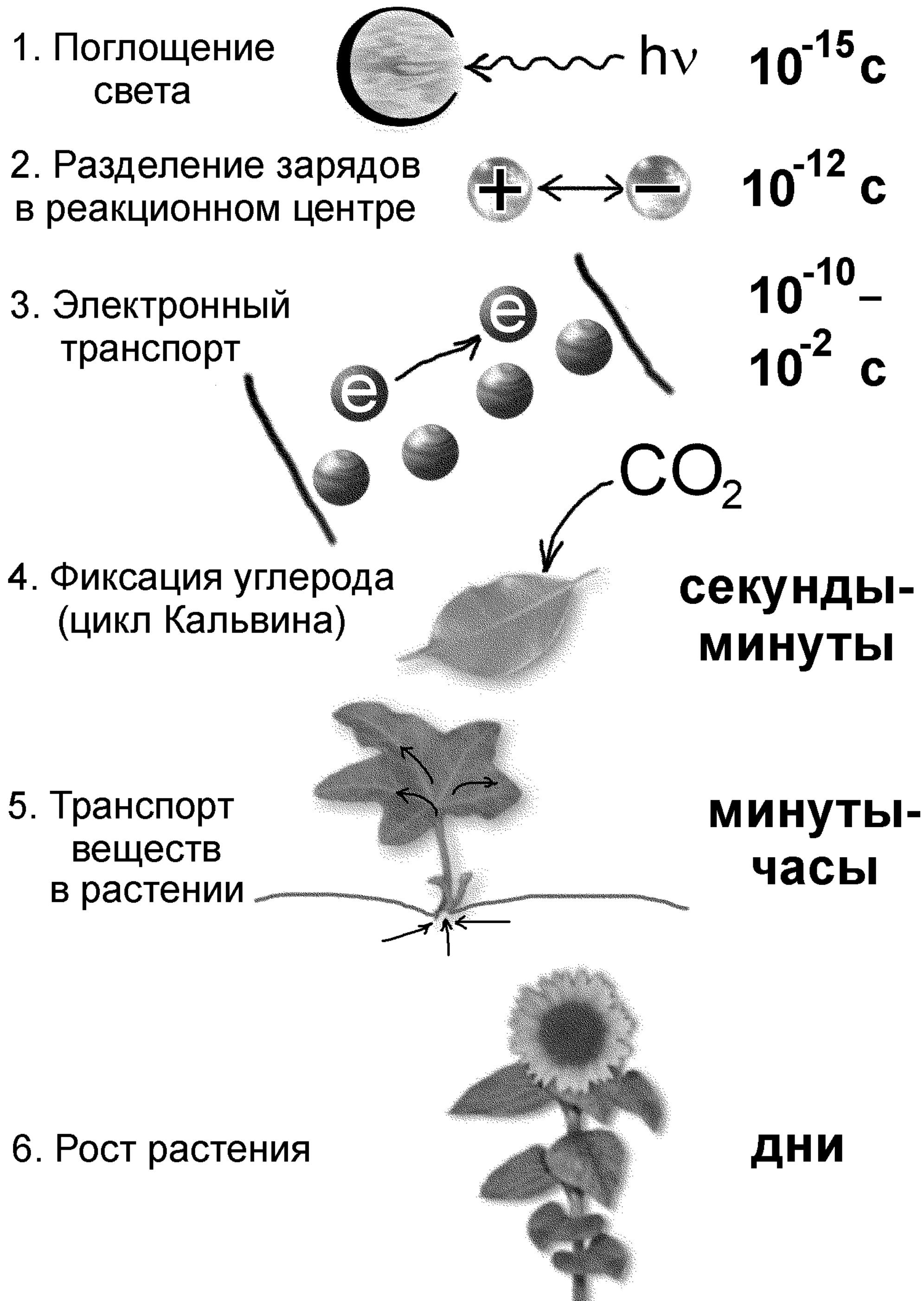
Г.Ю.Ризниченко

ИЕРАРХИЯ ВРЕМЕН В БИОЛОГИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Иерархия времен в биологических системах

- *Метод квазистационарных концентраций.*
- *Теорема Тихонова.*
- *Уравнение Михаэлиса Ментен.*
- *Конкуренция двух одинаковых видов, потребляющих один субстрат*

Иерархия фотосинте-тических процессов



Средние, быстрые и медленные времена

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y, z),$$

$$\frac{dy}{dt} = Q(x, y, z),$$

$$\frac{dz}{dt} = F(x, y, z).$$

$$\rightarrow$$

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y, z^*),$$

$$\frac{dy}{dt} = Q(x, y, z^*).$$

$$T_x << T_y << T_z$$

Медленная переменная z - параметр

Редукция системы с разными характерными временами

$P(x, y, z^*) = 0$

дифференциальное уравнение для быстрой переменной можно заменить алгебраическим

Выражение для быстрой переменной:

$$x = \bar{x}(y, z^*)$$

Уравнение для «средней переменной»

$$\frac{dy}{dt} = Q(\bar{x}(y, z^*), y, z^*).$$

Метод квазистационарных концентраций (КСК) (Семенова – Боденштейна)

В процессах с участием активных промежуточных частиц разность скоростей образования $v_о$ и расхода $v_р$ этих частиц мала по сравнению с этими скоростями.

Режим называется *квазистационарным*, а отвечающие ему концентрации активных промежуточных веществ – *квазистационарными концентрациями*.

Метод

Квазистацио-нарных

Концентраций

Семёнов Николай Николаевич (1896-1986) – советский химик, один из основоположников химической физики, лауреат Нобелевской премии по химии (1956, совместно с Сирилом Хиншелвудом). Разработал количественную теорию химических цепных реакций, теорию теплового взрыва, горения газовых смесей.

Макс Боденштейн

(1871-1947)

изучал процессы образования и термической диссоциации иодоводорода и состояние равновесия в реакции H2 + I2 = 2HI, а также кинетику образования бромоводорода (1907-1908) и хлороводорода (1913); предложил принцип стационарной концентрации

Дифференциальные уравнения для промежуточных соединений

$$\frac{dR_i}{dt} = v_0^i - v_p^i, \qquad i = 1, 2 \ldots\ldots l$$

можно заменить алгебраическими:

$$v_0^i = v_p^i, \qquad i = 1, 2, \ldots, l.$$

Такое рассмотрение не правомерно для **начальных стадий процесса**, когда *Ri* меняются от нуля до своих квазистационарных значений. Этот период носит название ***ПЕРИОДА ИНДУКЦИИ***