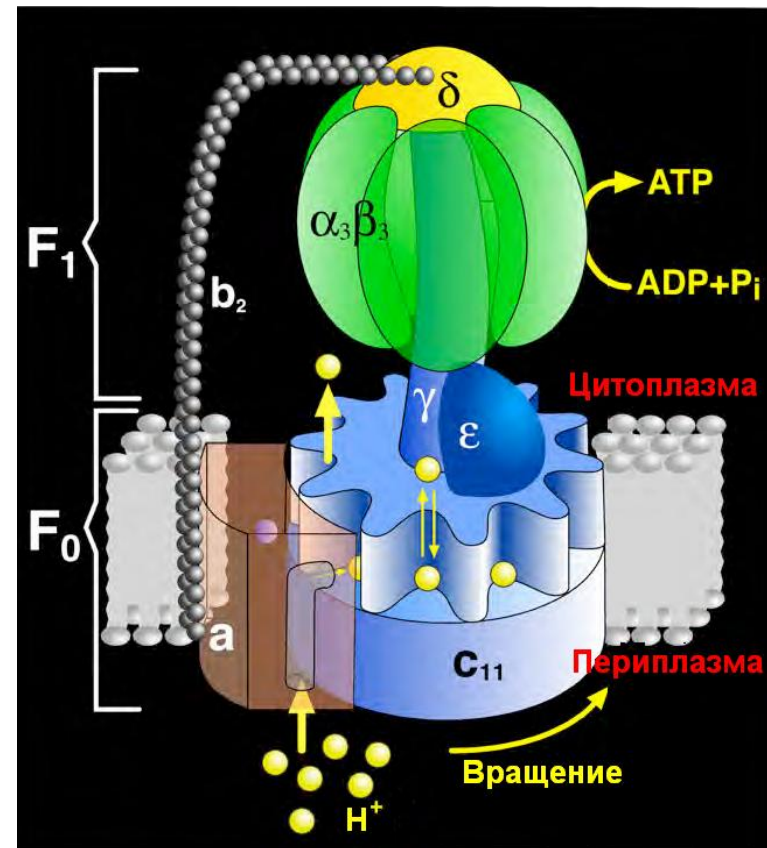
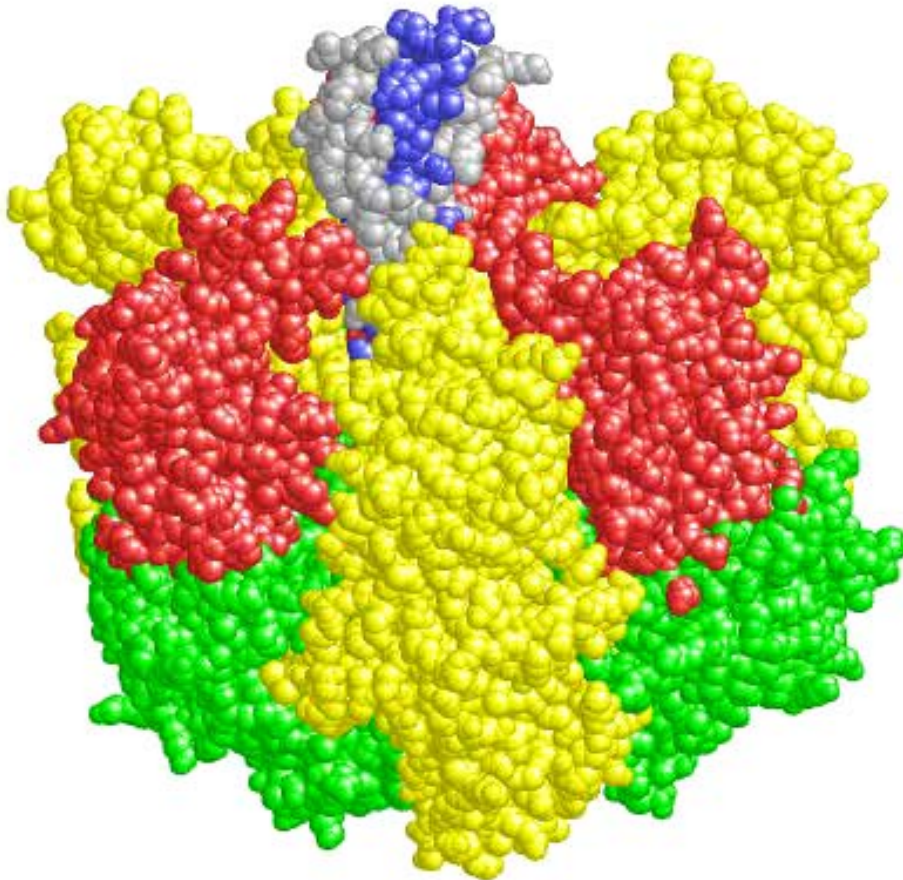


Колебательные процессы в биологии

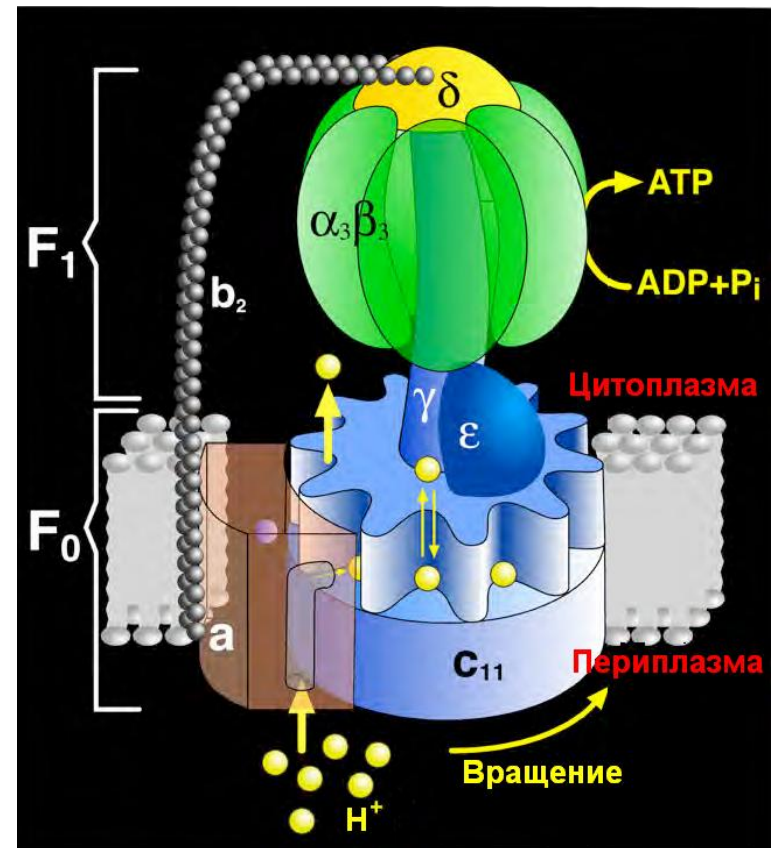
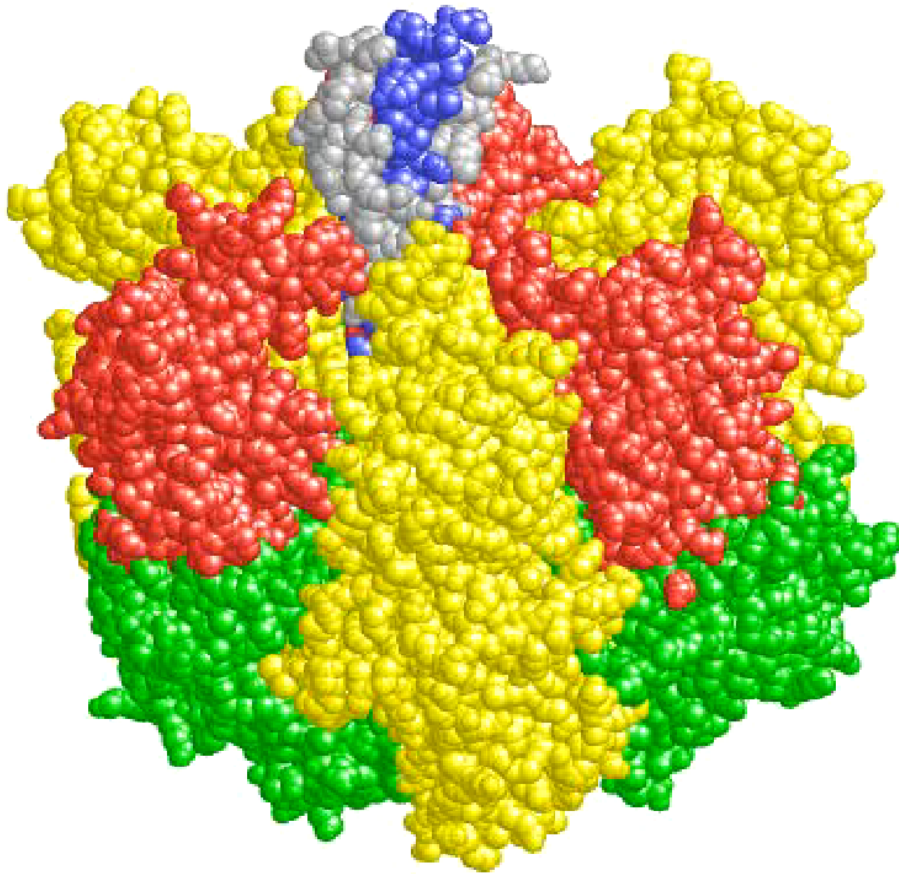
Колебательные процессы
присутствуют на всех
уровнях организации живой
материи

от макромолекул

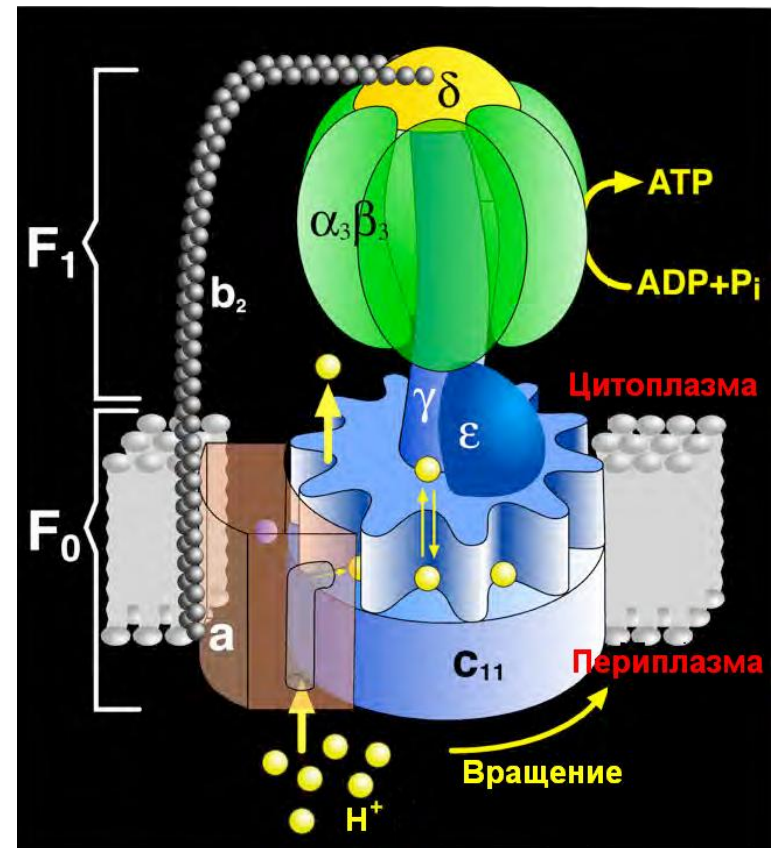
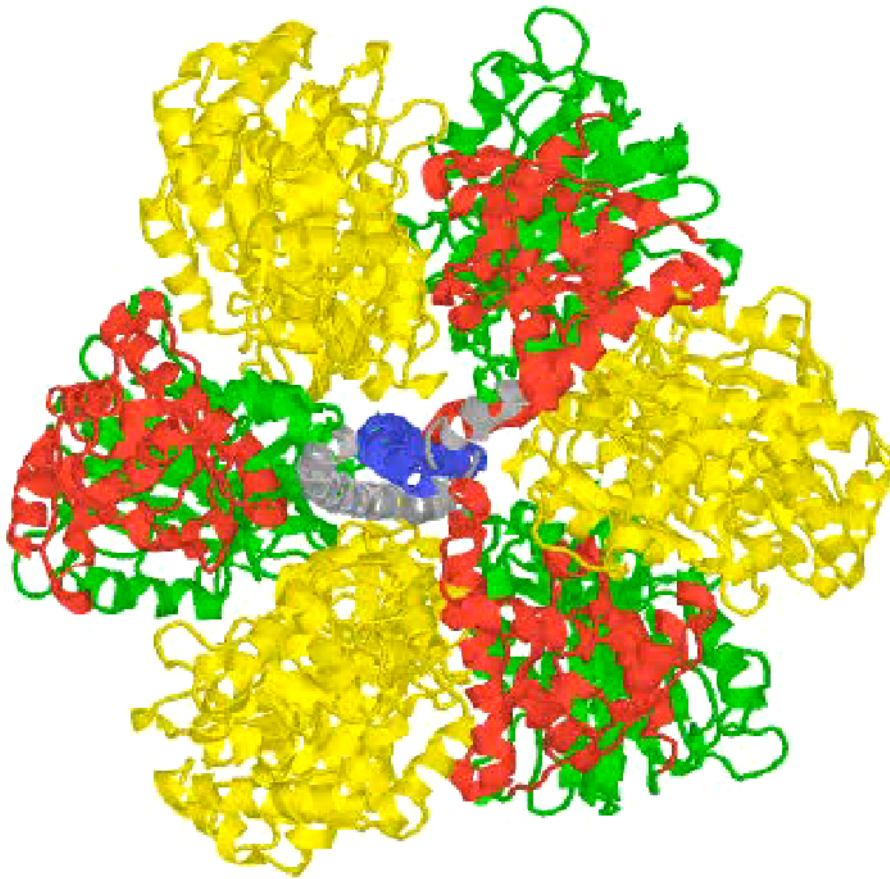
Работа АТФ-азы



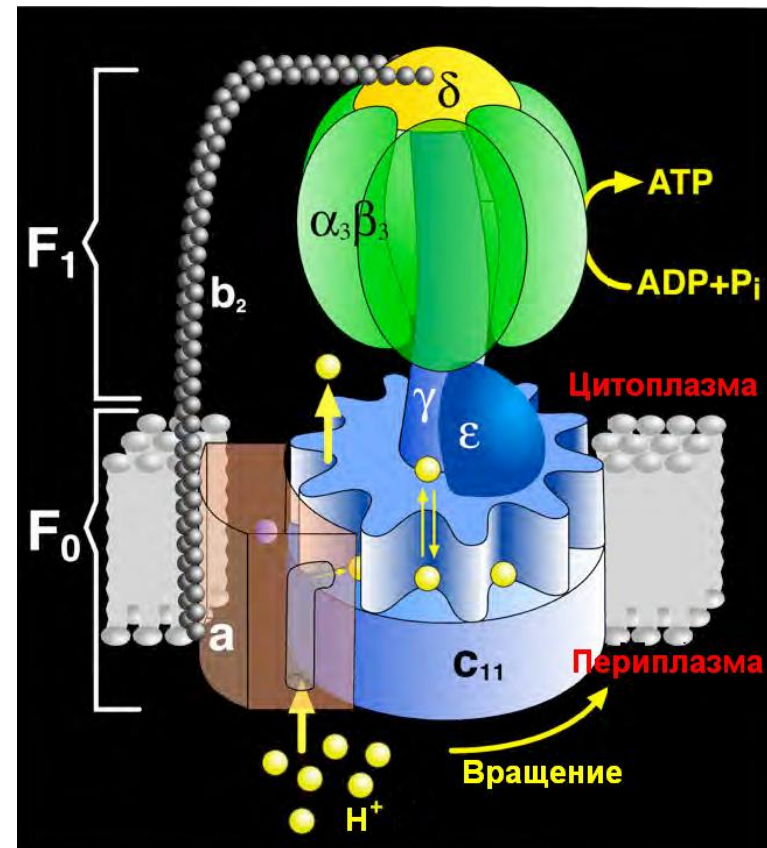
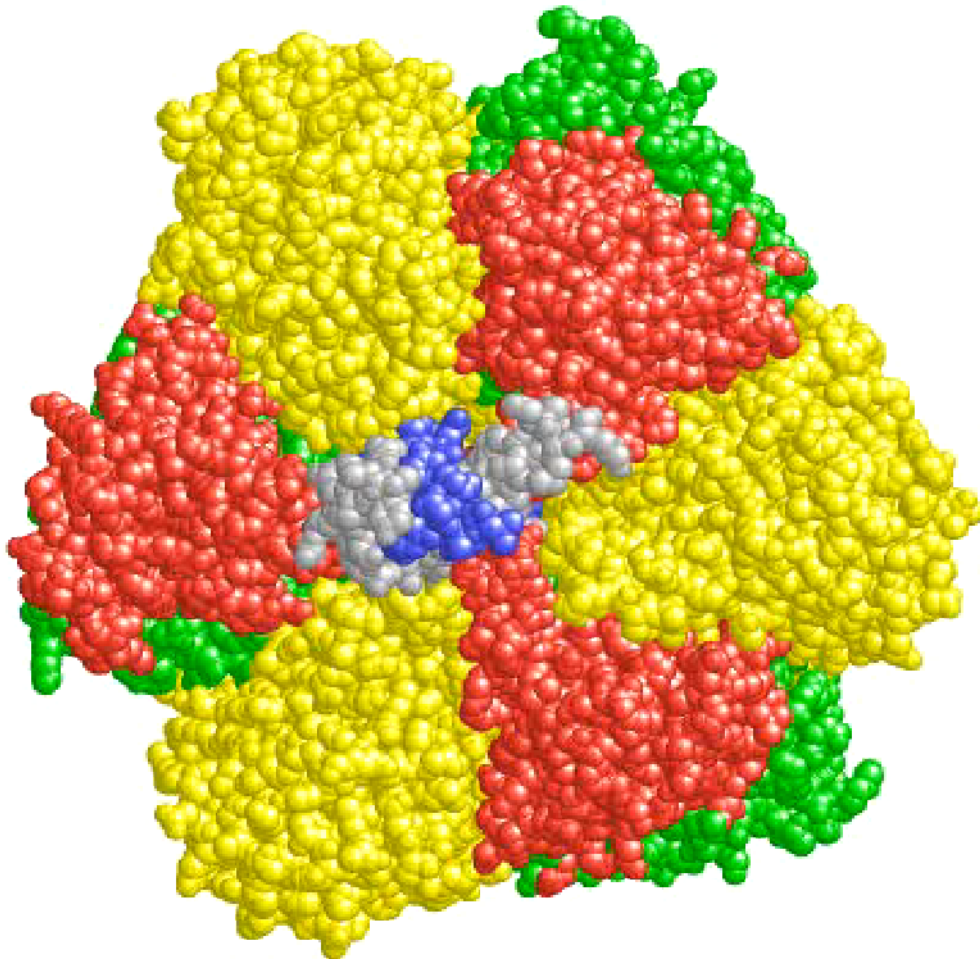
Работа АТФ-азы



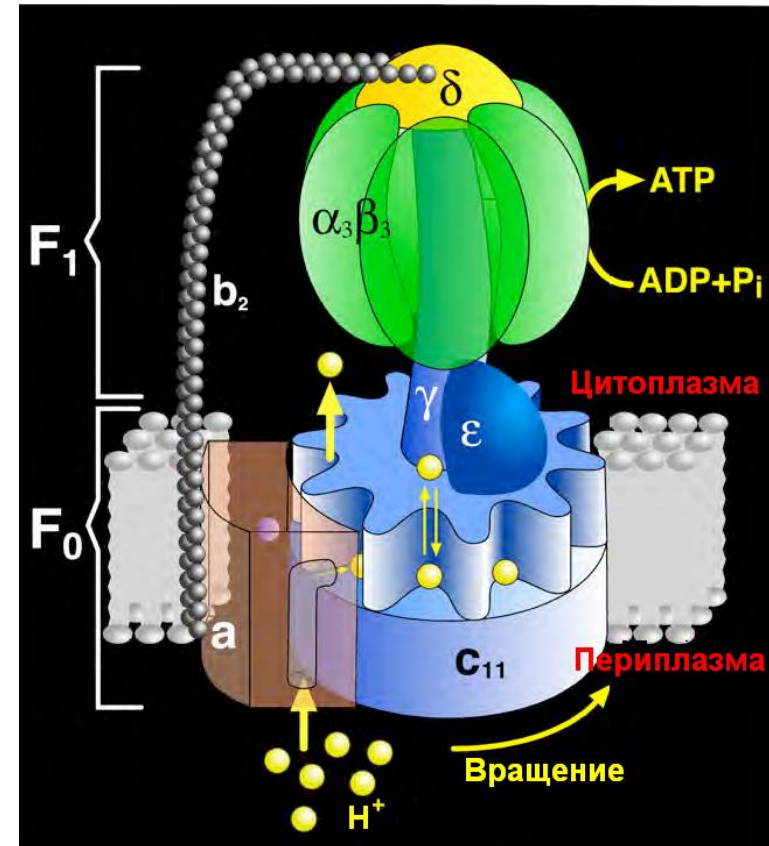
Работа АТФ-азы



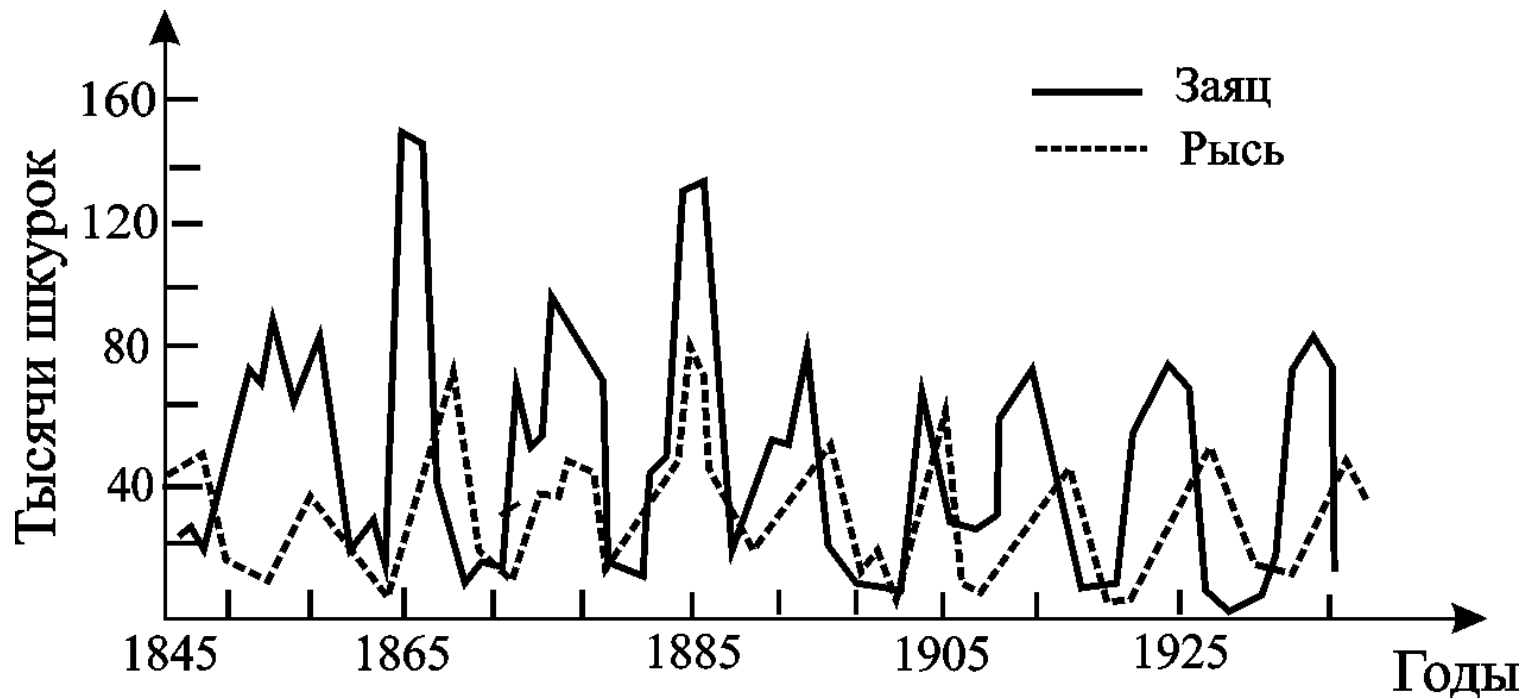
Работа АТФ-азы



Работа АТФ-азы



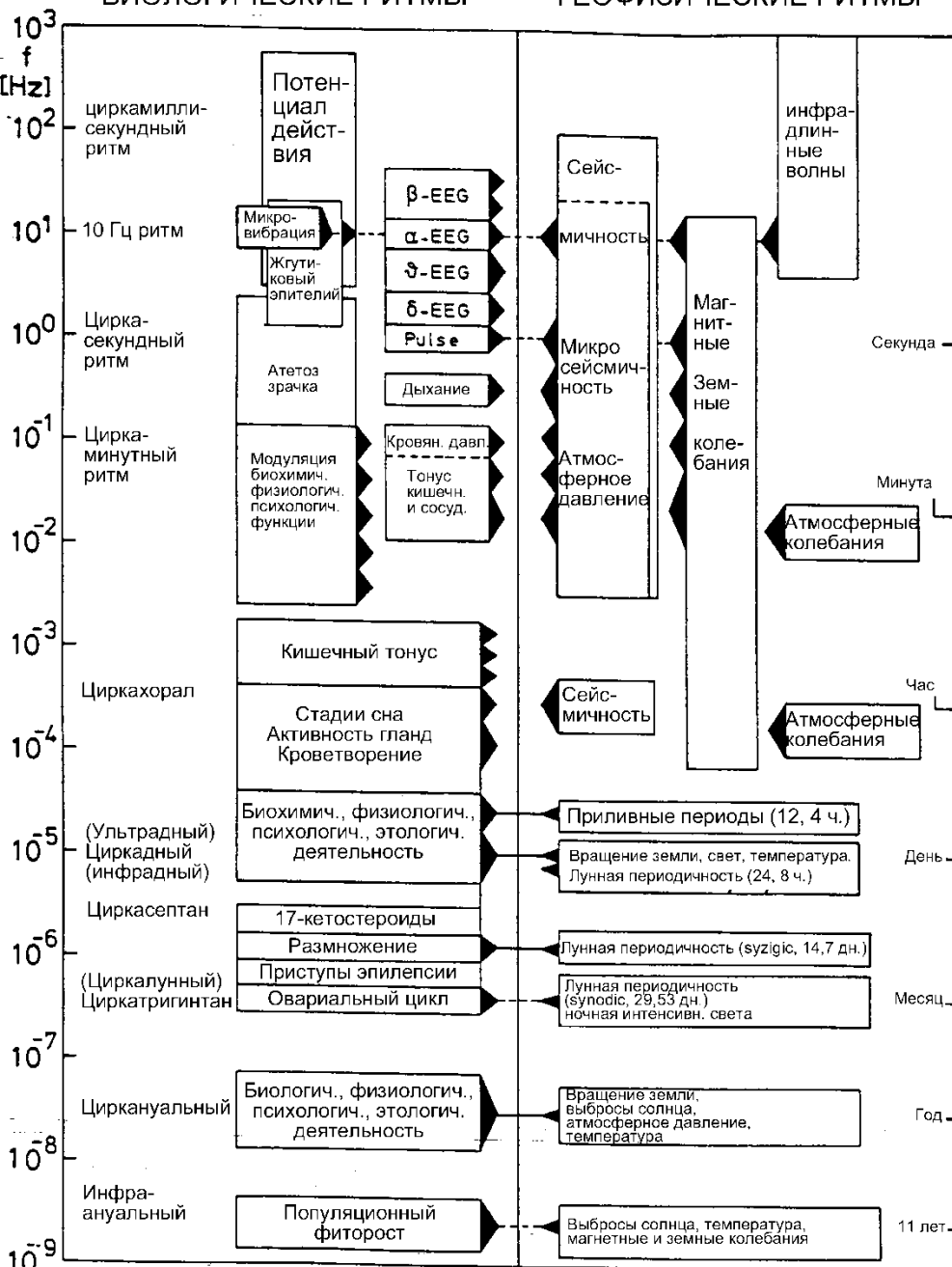
До популяций и сообществ



Кривые численности зайца и рыси в Канаде (по К. Вилли, В. Детье, 1974)

БИОЛОГИЧЕСКИЕ РИТМЫ

ГЕОФИЗИЧЕСКИЕ РИТМЫ



Биологические и геофизические ритмы

В организме
человека
более 300
суточных
ритмов

Обратная связь

- **Обратная связь** — это процесс, приводящий к тому, что результат функционирования какой-либо системы влияет на параметры, от которых зависит функционирование этой системы.
- Другими словами, на вход системы подаётся сигнал, пропорциональный её выходному сигналу (или, в общем случае, являющийся функцией этого сигнала)
- Различают положительную и отрицательную обратную связь. Отрицательная обратная связь изменяет входной сигнал таким образом, чтобы противодействовать изменению выходного сигнала. Это делает систему более устойчивой к случайному изменению параметров.
- Положительная обратная связь, наоборот, усиливает изменение выходного сигнала. Системы с сильной положительной обратной связью проявляют тенденцию к неустойчивости, в них могут возникать незатухающие колебания,

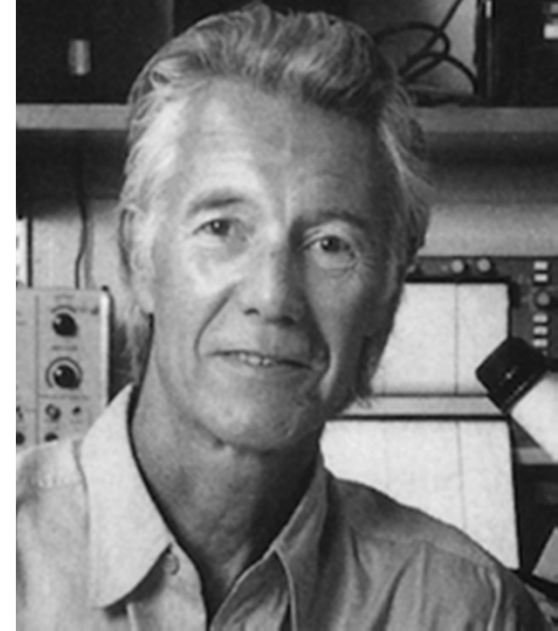
Схема Гудвина

$$\frac{dy}{dt} = \frac{k_1}{k_1 + z^n} - k_2 x$$

$$\frac{dy}{dt} = k_3 x - k_4 y$$

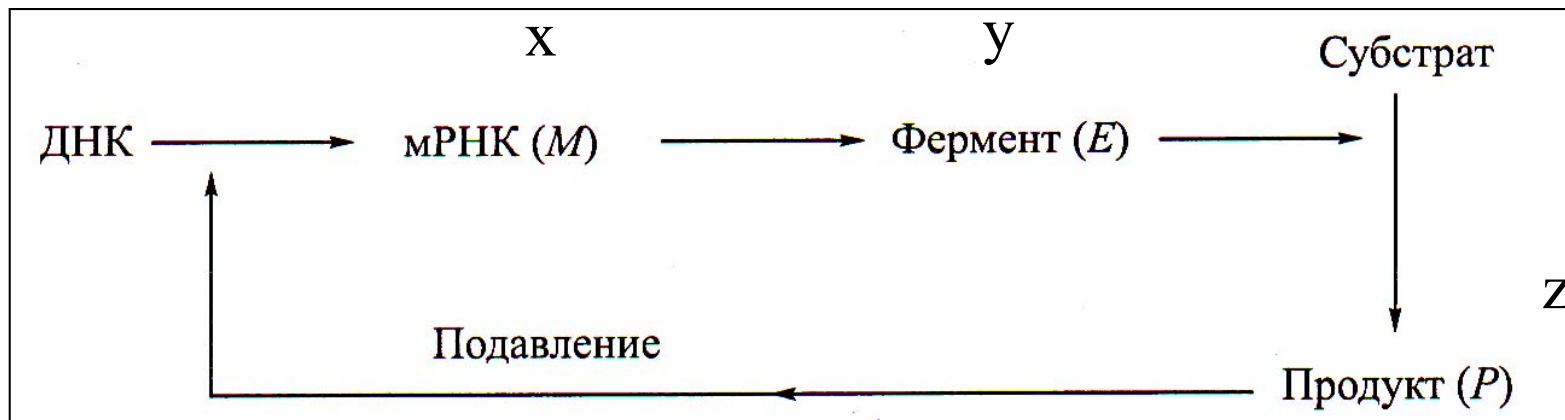
$$\frac{dz}{dt} = k_5 y - k_6 z$$

При $n > 8$ – колебания



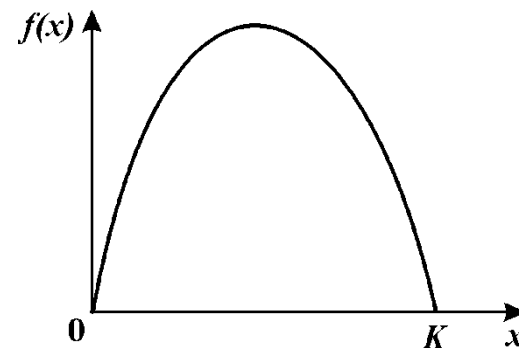
Brian Carey Goodwin
(1931 – 2009)

Канадский биолог и
биоматематик

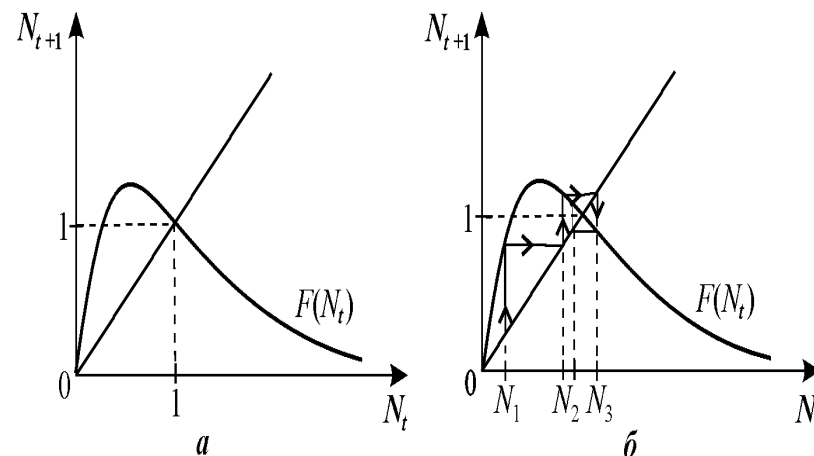


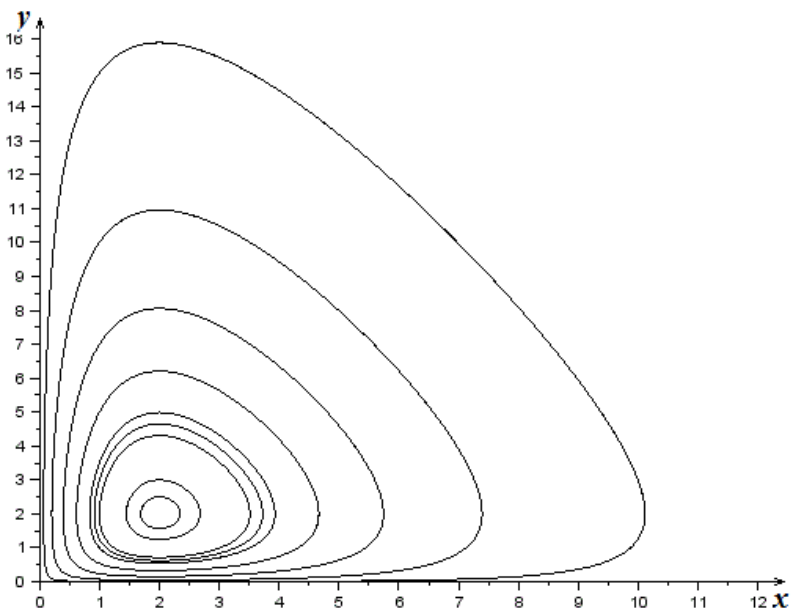
Биологические системы — сочетание положительных и отрицательных обратных связей

$$\frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right)$$



Автокаталитический член —
положительная обратная связь
Ферхюльстовский член —
отрицательная обратная связь

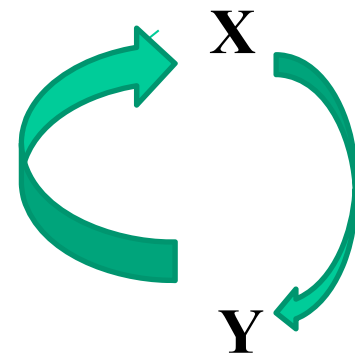




Модель Вольтерра

При $x - \max$, скорость
роста y $dy/dt - \max$ –

При $y - \max$ – скорость
убыли x $dx/dy - \max$

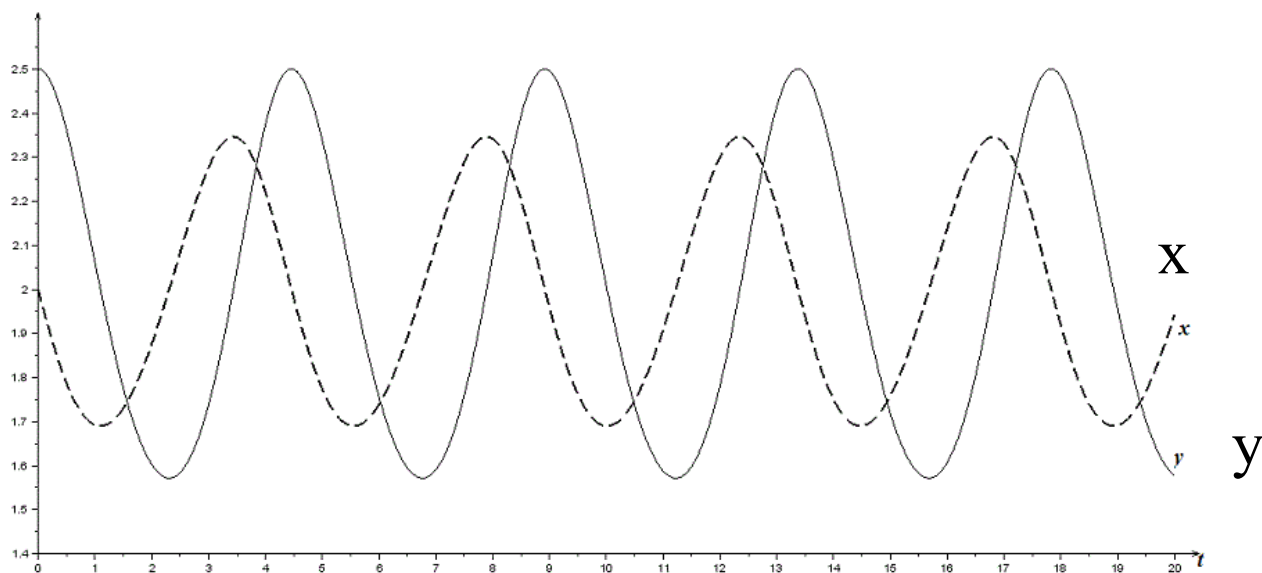


$$\frac{dx}{dt} = ax - bxy$$

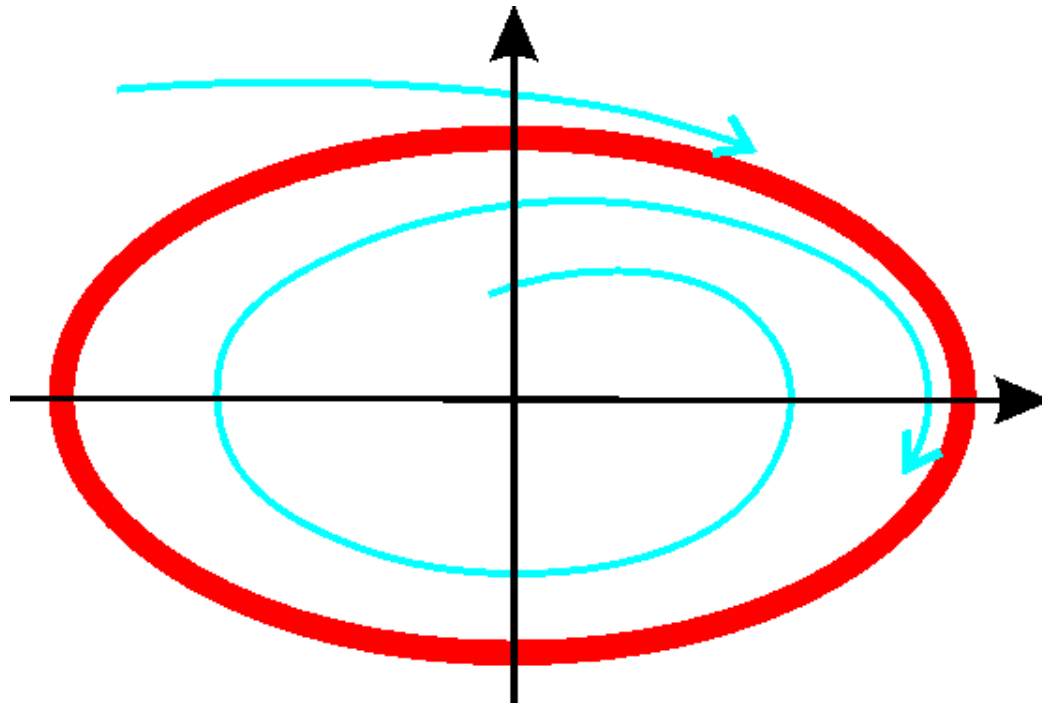
$$\frac{dy}{dt} = cxy - dy$$

$$a = 1; b = 0.5;$$

$$c = 1; d = 2$$



Предельный цикл



На фазовой плоскости автоколебания изображаются в виде замкнутой изолированной траектории – ПРЕДЕЛЬНОГО ЦИКЛА

Пример 1

Для системы уравнений

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= y + x[1 - (x^2 + y^2)], \\ \frac{dy}{dt} &= -x + y[1 - (x^2 + y^2)],\end{aligned}$$

Окружность

$$x^2 + y^2 = 1$$

является предельным циклом

Пример 1

Параметрические уравнения предельного цикла

$$x = \cos(t - t_1), \quad y = \sin(t - t_1),$$

Уравнения всех других фазовых траекторий

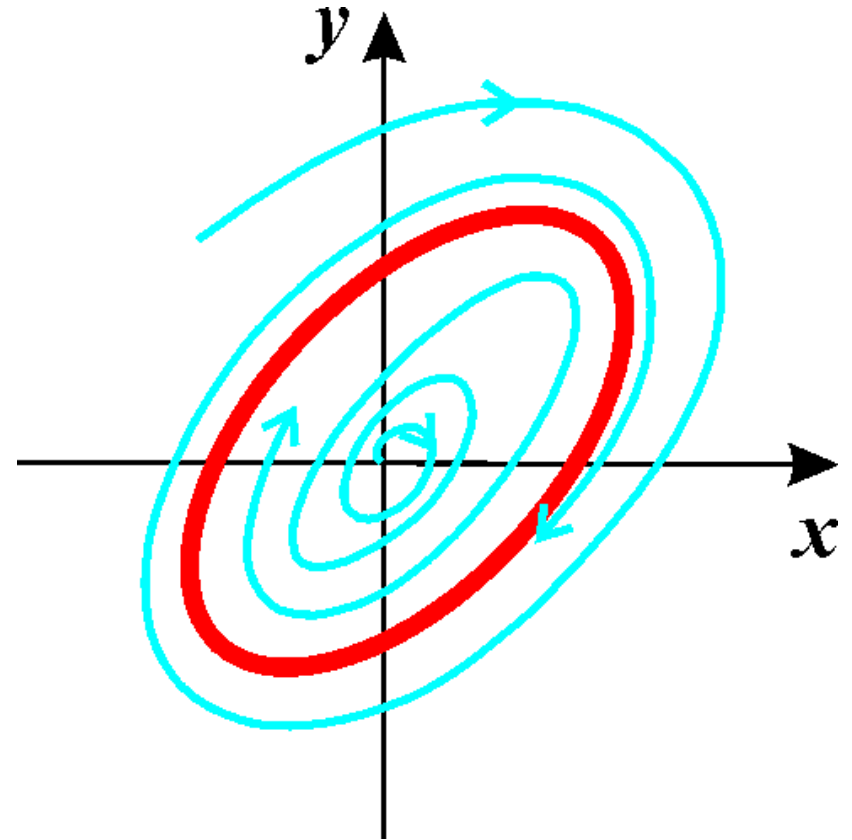
$$x = \frac{\cos(t - t_0)}{\sqrt{1 + C e^{-2(t-t_0)}}}, \quad y = \frac{\sin(t - t_0)}{\sqrt{1 + C e^{-2(t-t_0)}}}$$

При $C > 0$ фазовые траектории накручиваются на предельный цикл изнутри

При $-1 < C < 0$ фазовые траектории накручиваются на предельный цикл снаружи

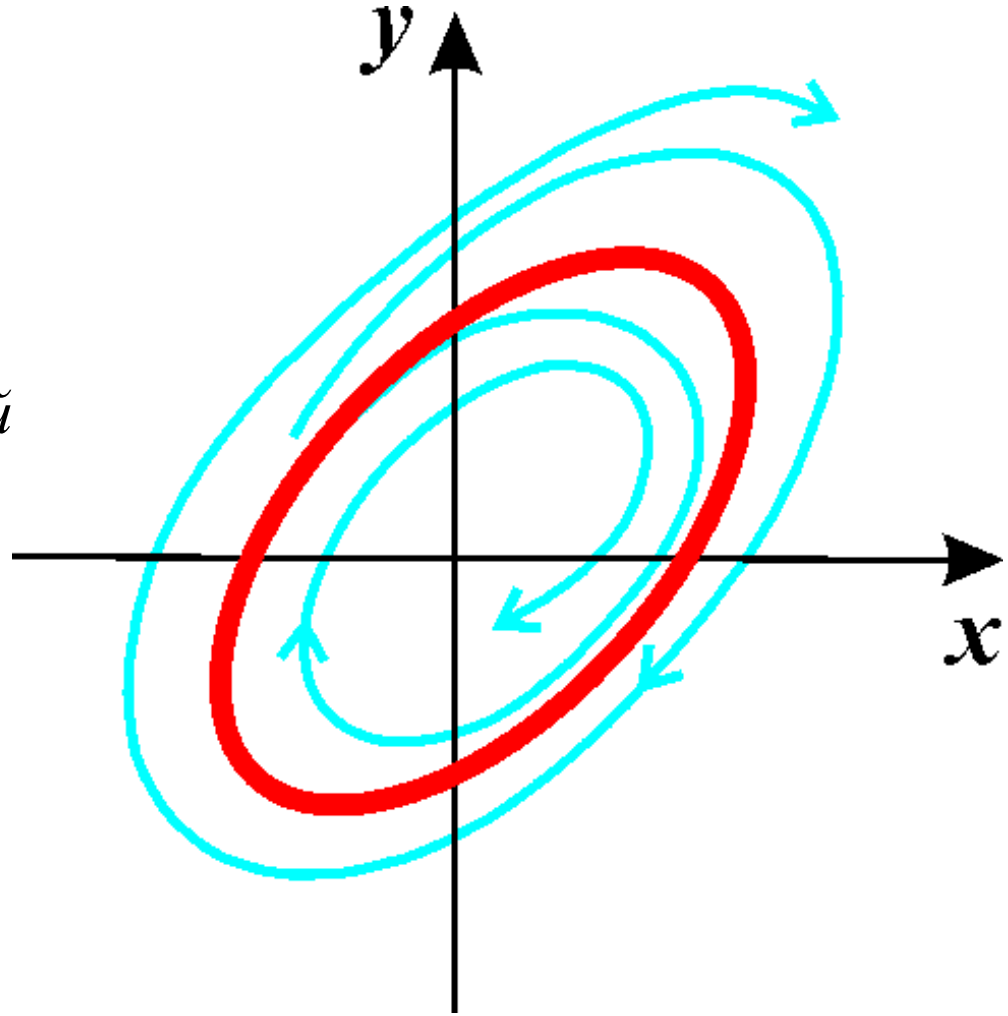
Устойчивый предельный цикл

Предельный цикл называется устойчивым, если существует такая область на фазовой плоскости, содержащая этот предельный цикл, — окрестность ε , что все фазовые траектории, начинающиеся в окрестности ε , асимптотически при $t \rightarrow \infty$ приближаются к предельному циклу.



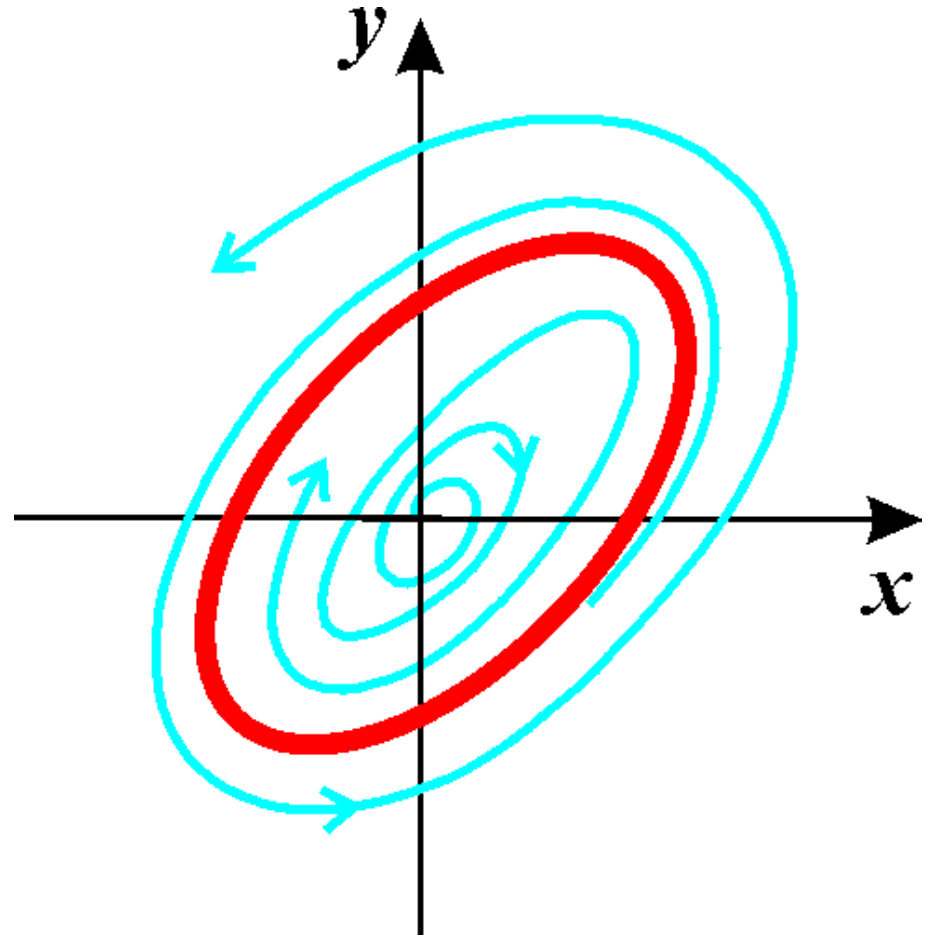
Неустойчивый предельный цикл

Если же, наоборот, в любой сколь угодно малой окрестности ε предельного цикла существует по крайней мере одна фазовая траектория, не приближающаяся к предельному циклу при $t \rightarrow \infty$, то такой предельный цикл называется неустойчивым.



Полуустойчивый предельный цикл

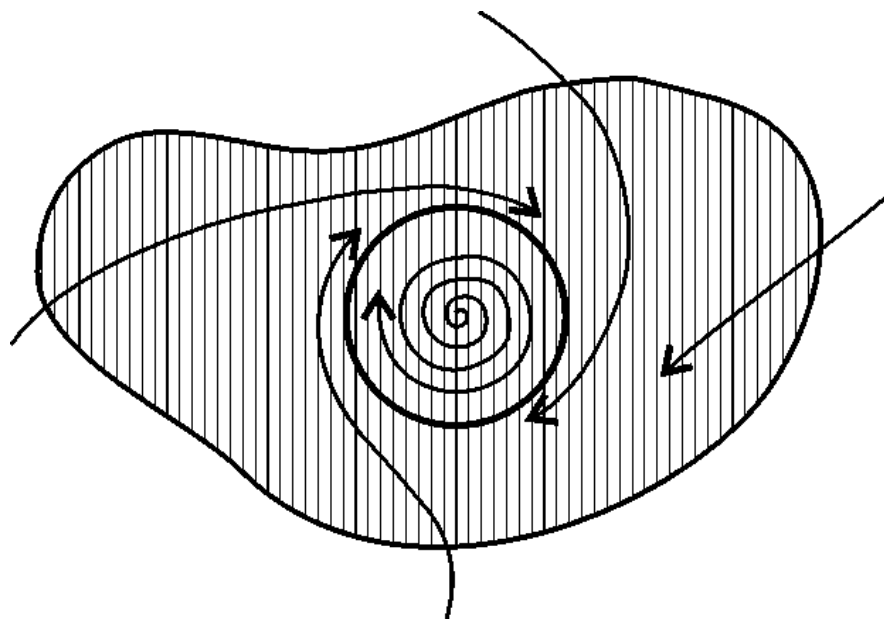
Такие циклы также называют двойными. При некотором значении параметра они расщепляются на два, один из которых устойчив, а другой - неустойчив



Теоремы существования предельного цикла (1)

Теорема 1

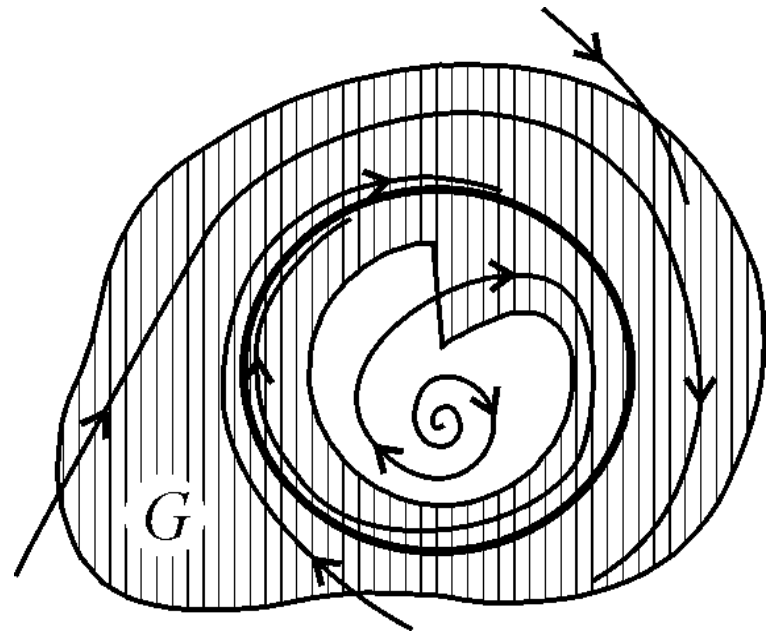
Если существует на фазовой плоскости некоторая замкнутая область, такая, что все фазовые траектории, пересекающие границу этой области, входят в нее, и внутри этой области находится неустойчивая особая точка, отличная от седла, то в этой области обязательно имеется хотя бы один предельный цикл



Теоремы существования предельного цикла (2)

Теорема 2

Пусть на фазовой плоскости существует область, из которой фазовые траектории не выходят, и в которой нет положений равновесия (особых точек). Тогда в этой области обязательно существует предельный цикл, причем все остальные траектории обязательно наматываются на него.



Критерии отсутствия замкнутых траекторий

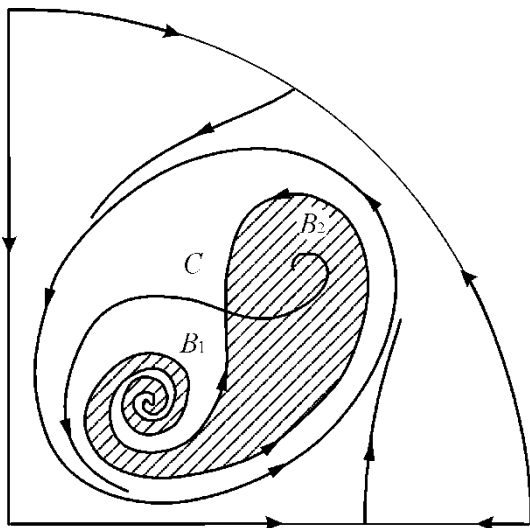
- 1. Если в системе не существует особых точек, то в ней не может быть и замкнутых фазовых траекторий.
- 2. Если в системе существует только одна особая точка, отличная от узла, фокуса и центра (например, седло), то такая система не допускает замкнутых фазовых траекторий.
- 3. Если в системе имеются только простые особые точки, причем через все точки типа узел и фокус проходят интегральные кривые, уходящие на бесконечность, то в такой системе нет замкнутых фазовых траекторий.

Устойчивость предельного цикла

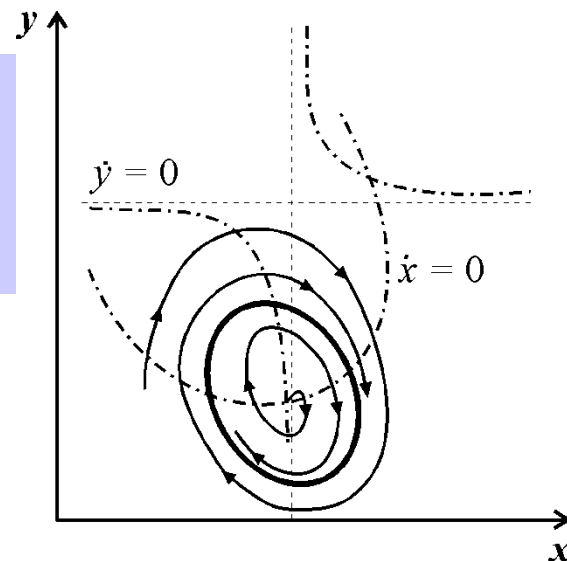
Предельный цикл устойчив, если $h < 0$ и неустойчив, если $h > 0$. Если же $h = 0$, уравнения первого приближения не решают вопроса об устойчивости периодического движения.

$$h = \frac{1}{T} \int_0^T \{P'_x[\varphi(t), \psi(t)] + Q'_y[\varphi(t), \psi(t)]\} dt,$$

$x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ — любое периодическое решение, соответствующее рассматриваемому предельному циклу, T — период решения.

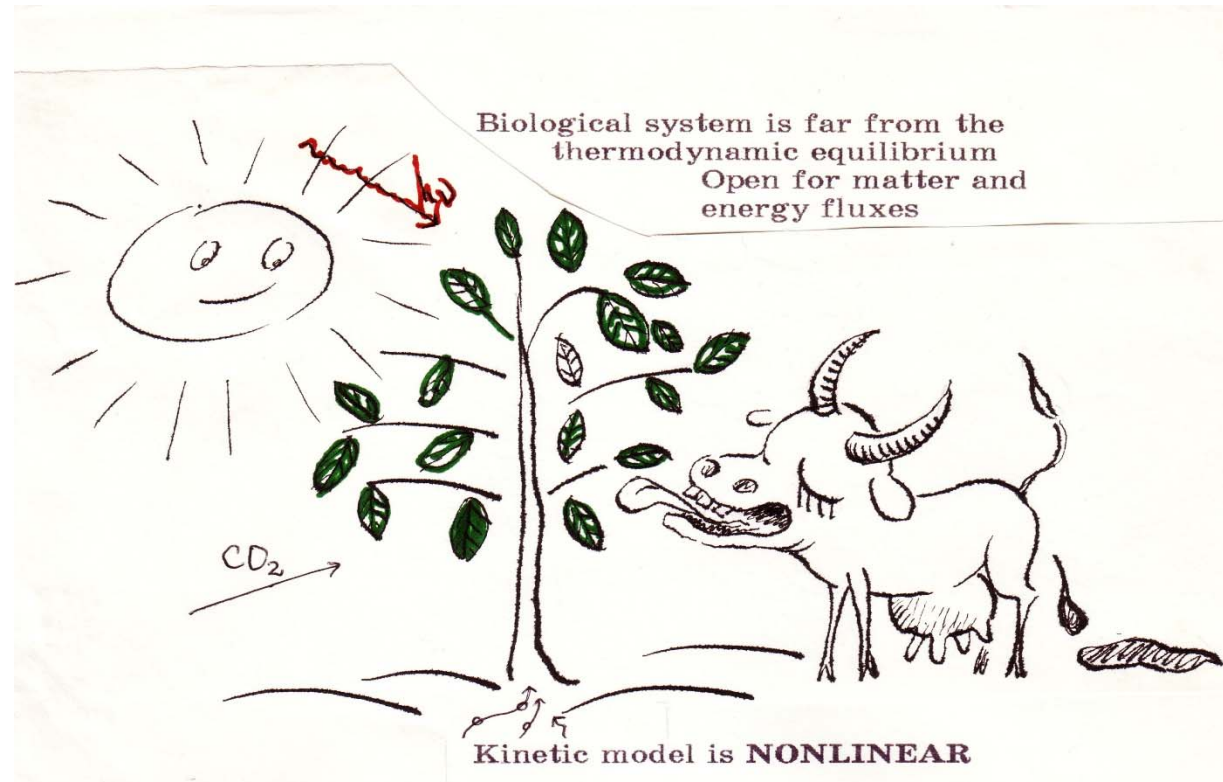


ВАЖНО



Предельные циклы возможны
лишь в системе, правые части
которой представлены
нелинейными функциями.

ТОЛЬКО В НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ БЫВАЮТ



*Only in **NONLINEAR SYSTEM***

SELFORGANIZATION IN TIME:

1. selfoscillation
2. multistability
3. quasystochastic regimes in deterministic systems

SELFORGANIZATION IN SPACE

1. autowaves
2. dissipative structures
(nonequilibrium steady distributions)
3. stochastic in space regimes



**Андронов Александр
Александрович (1901-1952)**

Рождение предельного цикла. Бифуркация Андронова- Хопфа



**Эберхáрд Фредерíк
Фердинáнд Хóпф
(1902-1983)**

Бифуркация впервые была исследована А.А. Андроновым (1937) для случая $N = 2$ и обобщена Е. Хопфом (1942) на системы с произвольной размерностью. (Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М., Наука, 1981)

Модельная система мягкого возбуждения автоколебаний

$$\frac{dr}{dt} = r (c - r^2),$$

r и φ - полярные
координаты

$$\frac{d\varphi}{dt} = 2\pi.$$

При увеличении параметра c при $c = 0$ фокус теряет устойчивость и рождается предельный цикл

Стационарные решения

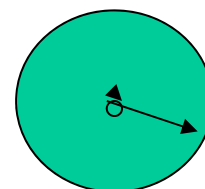
$$r(c - r^2) = 0.$$

1. $\bar{r}_1 = 0$

2,3. $c - \bar{r}^2 = 0 \quad \bar{r}_{2,3} = \pm\sqrt{c}$

Имеет реальный смысл

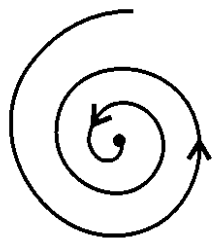
$$\bar{r}_2 = \sqrt{c}$$



Окружность радиуса c

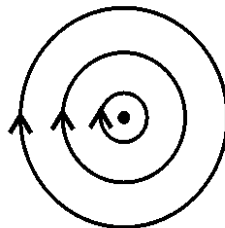
Суперкритическая бифуркация Андронова-Хопфа (мягкое возбуждение)

Устойчивый фокус



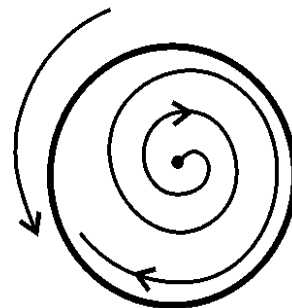
$c < 0$

Центр



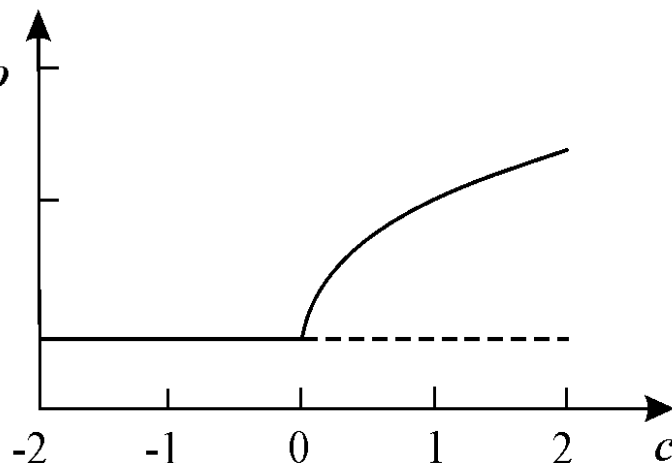
$c = 0$

Неустойчивый фокус +
устойчивый предельный цикл



$c > 0$

радиус
предельного
цикла



$$\frac{dr}{dt} = r (c - r^2),$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = 2\pi.$$

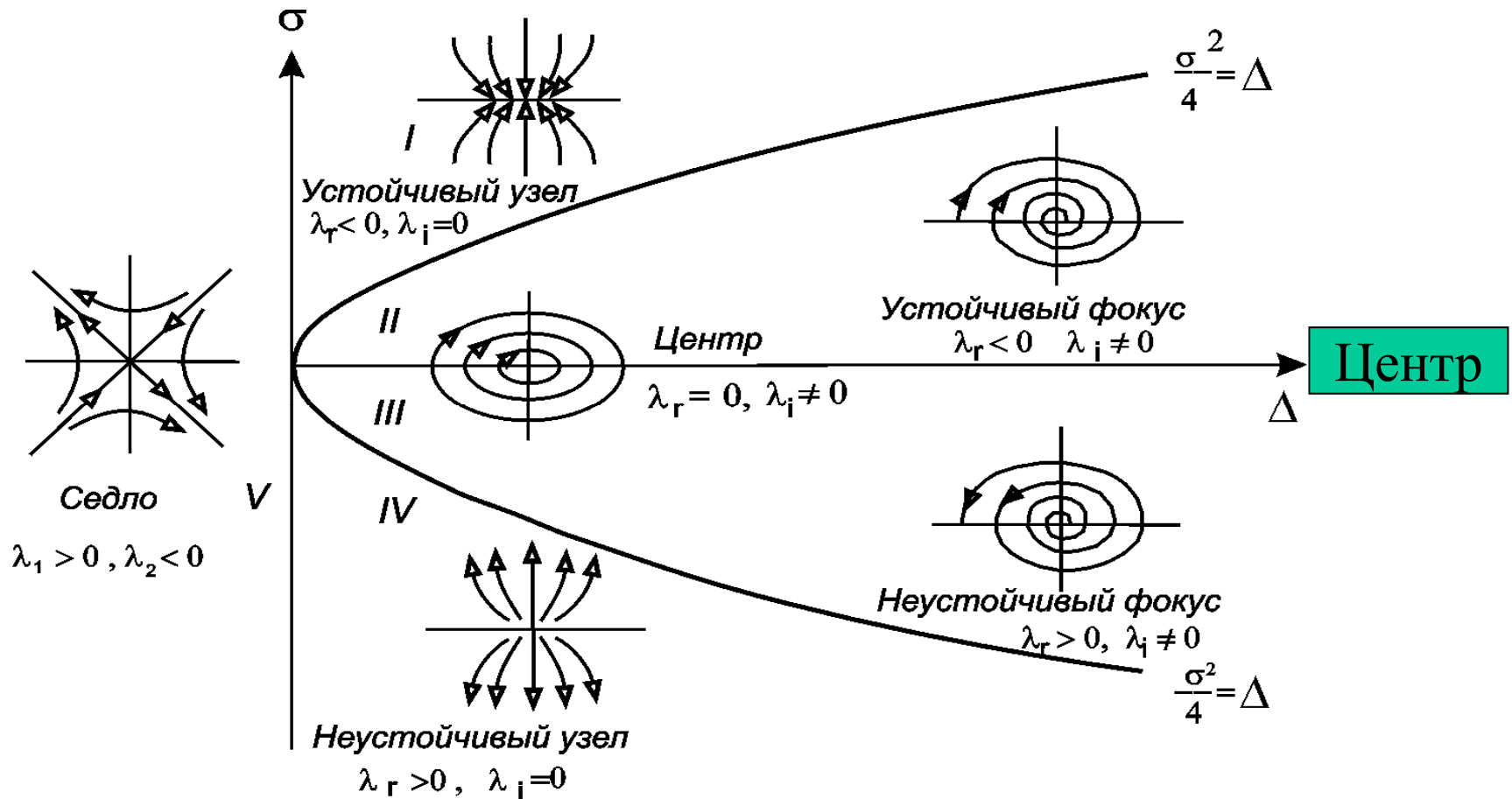
Бифуркационная диаграмма линейной системы

$$\sigma = -(a+d); \Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 - 4\Delta}}{2}$$

$$\frac{d\xi}{dt} = a\xi + b\eta,$$

$$\frac{d\eta}{dt} = c\xi + d\eta.$$



Модельная система жесткого возбуждения автоколебаний

$$\frac{dr}{dt} = r\left(\frac{c}{4} + r^2 - r^4\right),$$

$$r = 0,$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = 2\pi.$$

$$r^2 = \frac{1}{2} \left[1 \pm (1+c)^{1/2} \right].$$

При $c = -1$ рождается неустойчивый предельный цикл малой амплитуды и устойчивый предельный цикл конечной амплитуды. При $c > -1$ второе стационарное решение – устойчивый предельный цикл. При $-1 < c < 0$ три стационарных решения, добавляется – неустойчивый предельный цикл с амплитудой

$$r^2 = \frac{1}{2} \left[1 - (1+c)^{1/2} \right].$$

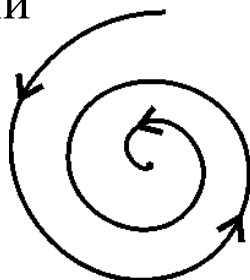
При $c > 0$ неустойчивый предельный цикл пропадает

Субкритическая
бифуркация
Андронова –
Хопфа

Устойчивый фокус,
неустойчивый
предельный цикл,
устойчивый
предельный цикл

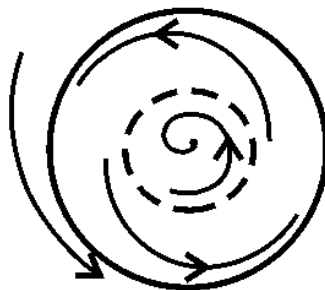
Неустойчивый фокус,
устойчивый
предельный цикл

Устойчивый
фокус



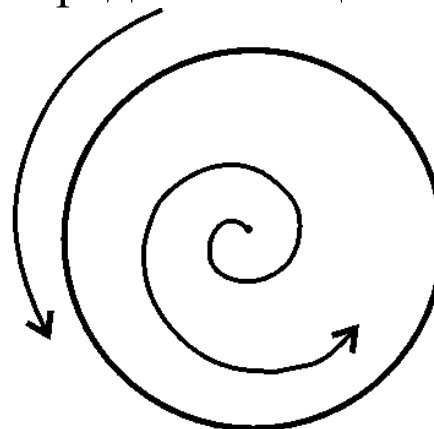
$$c < -1$$

a



$$-1 < c < 0$$

б



$$c > 0$$

в

$$\frac{dr}{dt} = r\left(\frac{c}{4} + r^2 - r^4\right),$$

$$r^2 = 1 \pm (1 + c)^{1/2}.$$



Ветвь $r = 0$
устойчива при
 $c < 0$ и
неустойчива
при $c > 0$.



Брюсселятор

И. Пригожин, Р. Лефевр (1965)



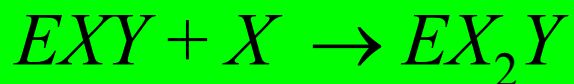
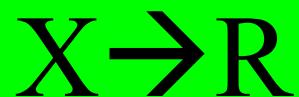
1917-2003

Простейшая реализация кубической
нелинейности в химической реакции



(тримолекулярная реакция)

Схема реакций Брюсселятора (тримолекулярная реакция

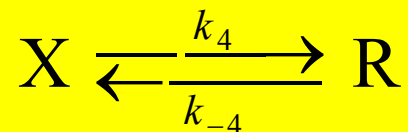
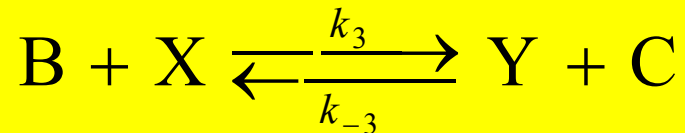
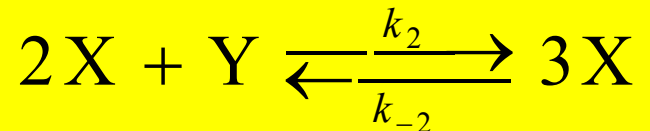
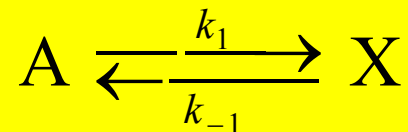


Система уравнений

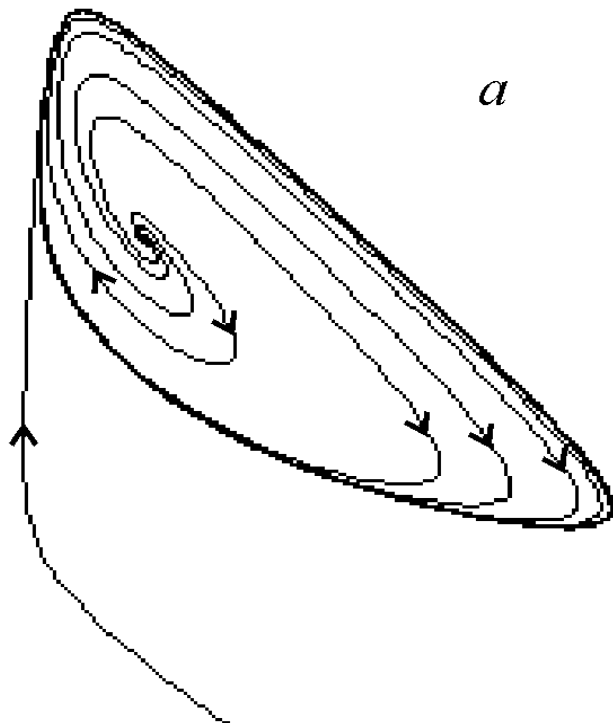
Если конечные продукты C и R удаляются из реакционного пространства, а субстрат A находится в избытке, $k_{-1}=k_{-3}=k_{-4}=0$. Пусть также $k_{-2}=0$. Значения остальных констант положим равными единице.

$$\frac{dX}{dt} = A + X^2 Y - (B + 1) X$$
$$\frac{dY}{dt} = BX - X^2 Y.$$

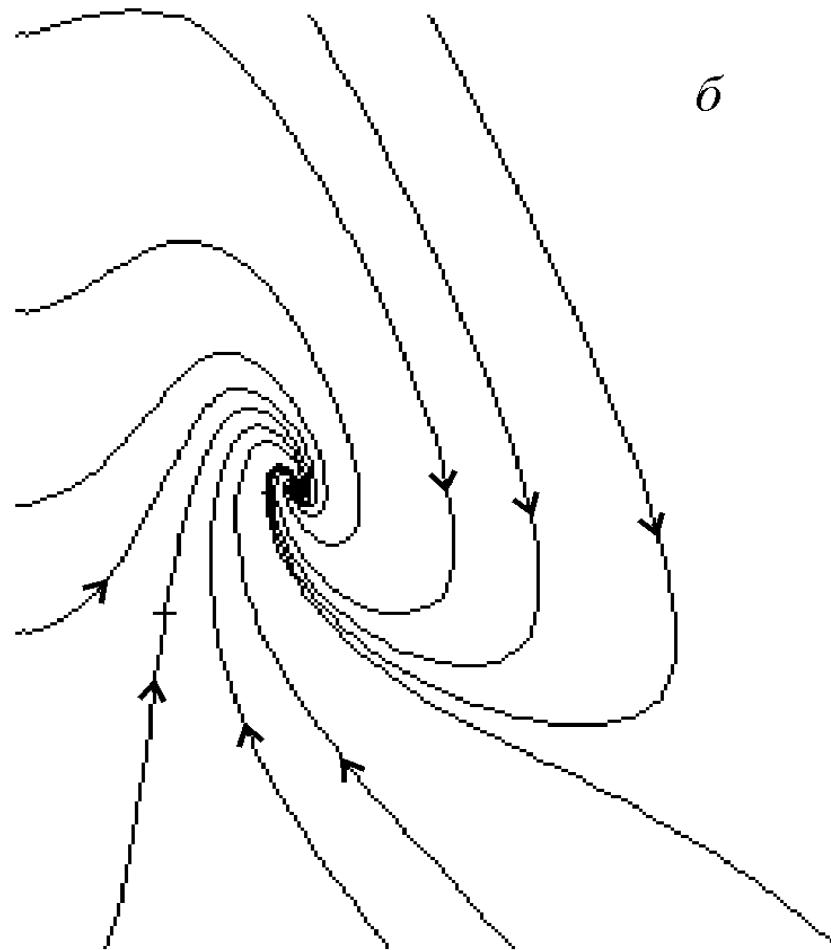
$$\bar{X} = A, \quad \bar{Y} = \frac{B}{A}.$$



Брюсселятор



a



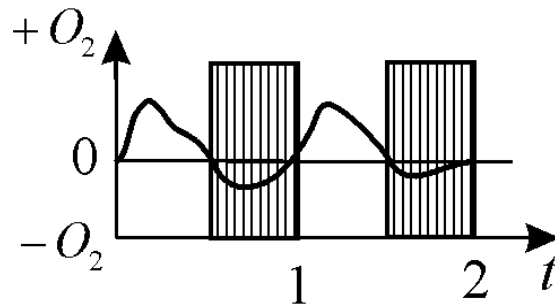
б

Фазовый портрет системы брюсселятор при $V > 1 + A^2$ (a) и $V < 1 + A^2$ (б).

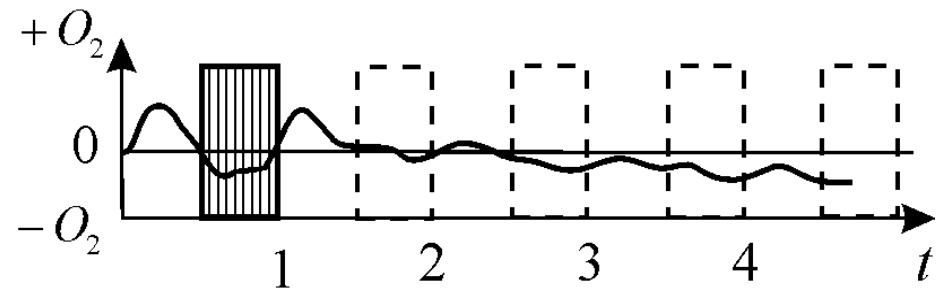
Модель темновых процессов фотосинтеза

Д.С.Чернавский, Н.М.Чернавская, 1967

Л.Н.Белюстина, Г.А.Кокина, 1967



a



б

Зависимость поглощения кислорода и выделения углекислоты зеленым листом от времени. *a* - при периодическом освещении; *б* - при непрерывном освещении

Упрощенная схема цикла Кальвина



Система уравнений для концентраций легких c_3 и тяжелых c_6 сахаров

Предполагалось, что прибыль тяжелых сахаров c_6 может осуществляться за счет соединения двух легких c_3 . Их убыль, так же как и убыль тяжелых сахаров, происходит в результате бимолекулярного взаимодействия тяжелых и легких сахаров. Имеется приток продукта c_3 в сферу реакции.

$$\frac{dc_3}{dt} = \alpha_1 c_3^2 - \alpha_2 c_3 c_6$$

$$\frac{dc_6}{dt} = \beta_1 c_3^2 - \beta_2 c_3 c_6 - \beta_3 c_6^2$$

Система уравнений темновых процессов фотосинтеза в безразмерных переменных

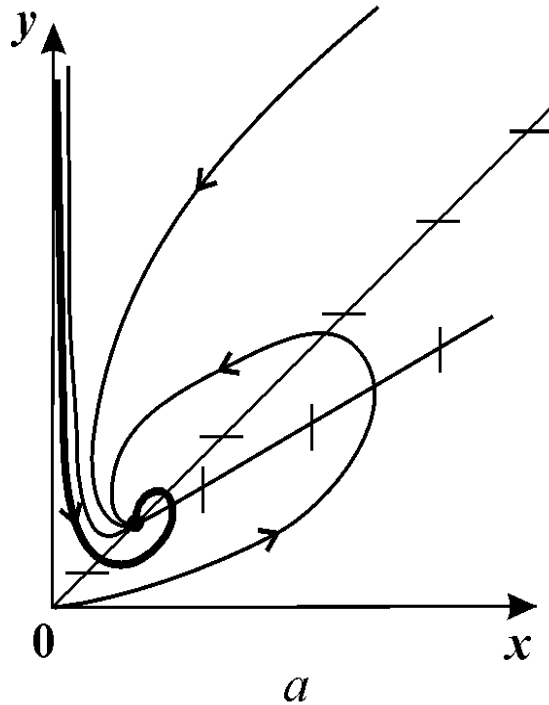
Легкие
сахара c_3

$$\frac{dx}{dt} = x^2 - (1 - \gamma)xy + \gamma$$

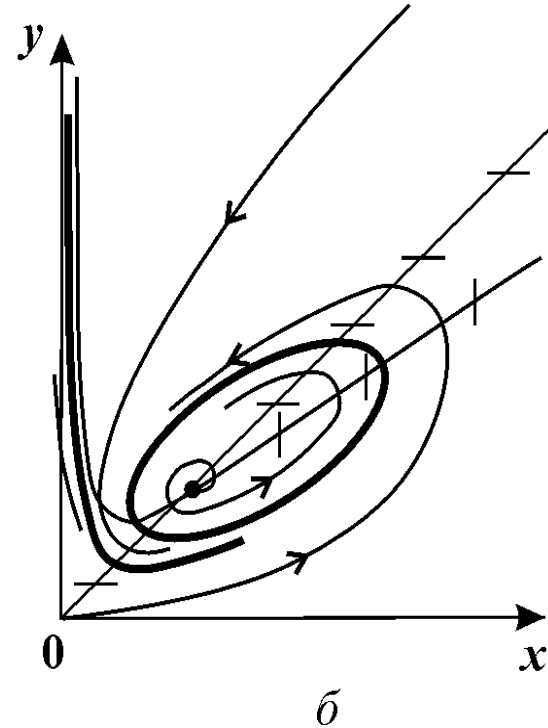
Тяжелые
сахара c_6

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{7} \varepsilon (7x^2 - y^2 - 6xy)$$

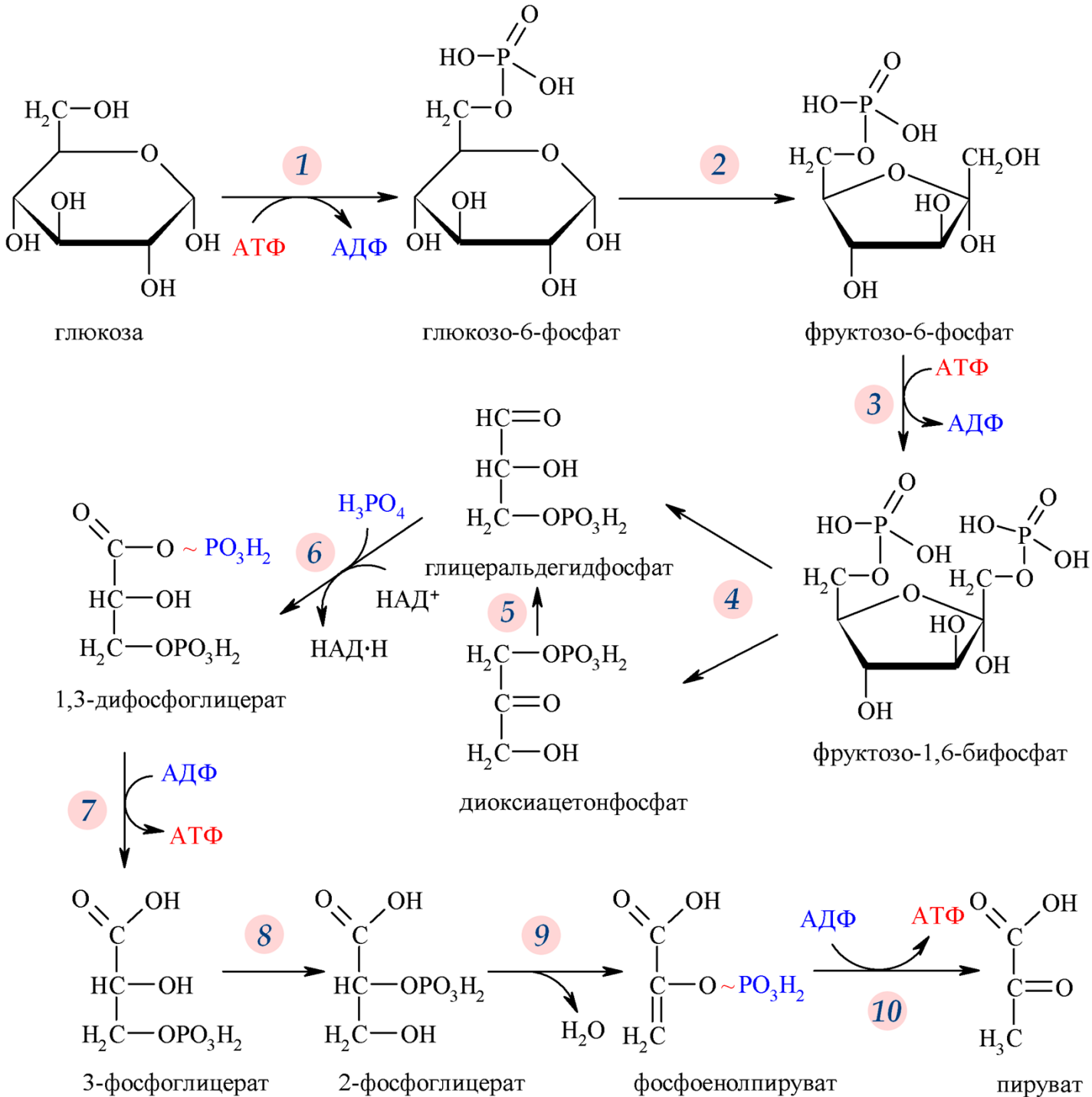
Фазовые портреты для колебаний в цикле Кальвина



$$\varepsilon < \frac{7}{8}(1 - \gamma)$$



$$\varepsilon > \frac{7}{8}(1 - \gamma)$$



Гликолиз

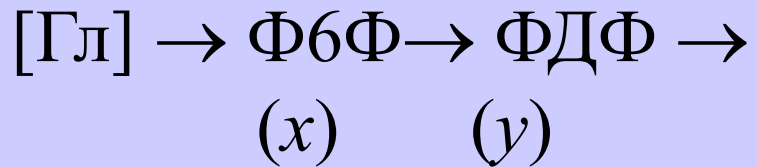
- ЛИЗИС

(расщепление)

ГЛЮКОЗЫ

Колебания в гликолизе

Активация



$$\frac{dx}{dt} = k - \chi \frac{x}{(K_{mx} + x)} \frac{y}{(K_{my} + y)}$$

$$\frac{dy}{dt} = \chi \frac{x}{(K_{mx} + x)} \frac{y}{(K_{my} + y)} - q \frac{y}{(K'_{my} + y)}$$

Уравнения гликолиза

$$\frac{dx}{dt} = k - \chi \frac{x}{(K_{mx} + x)} \frac{y}{(K_{my} + y)}$$

$$\frac{dy}{dt} = \chi \frac{x}{(K_{mx} + x)} \frac{y}{(K_{my} + y)} - q \frac{y}{(K'_{my} + y)}$$

Замена переменных:

$$t' = \frac{t \chi k K'_{my}}{K_{mx} K_{my} (q - k)}, \quad x' = \frac{x \chi K'_{my}}{K_{mx} K_{my} (q - k)}, \quad y' = y \frac{q - k}{k K'_{my}}.$$

Безразмерные уравнения ГЛИКОЛИЗА

$$\frac{dx}{dt} = 1 - xy,$$

Ф6Ф

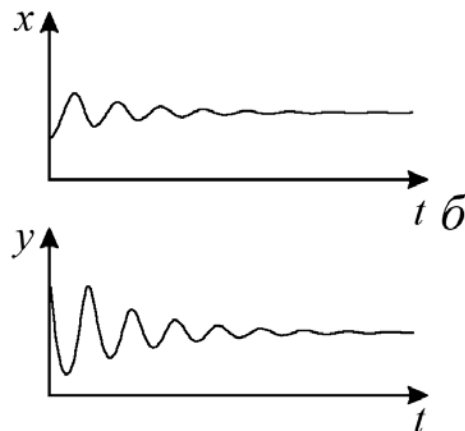
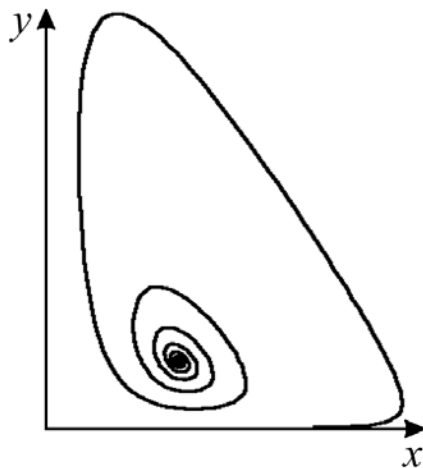
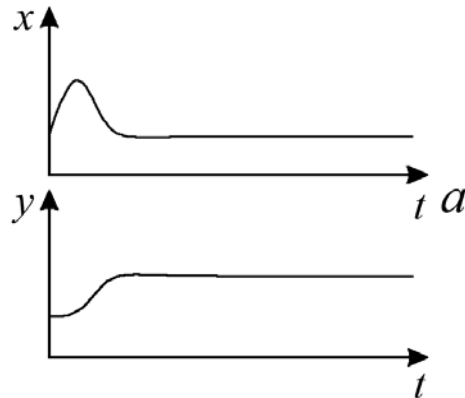
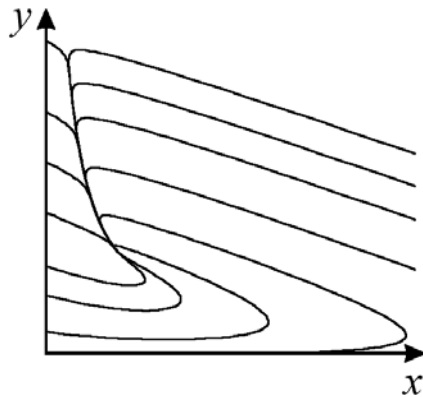
$$\frac{dy}{dt} = \alpha y \left(x - \frac{1+r}{1+ry} \right),$$

ФДФ

$$\alpha = \frac{(q-k)^2 K_{mz} K_{my}}{(K'_{my})^2 k \chi}, \quad r = \frac{k}{q+k}.$$

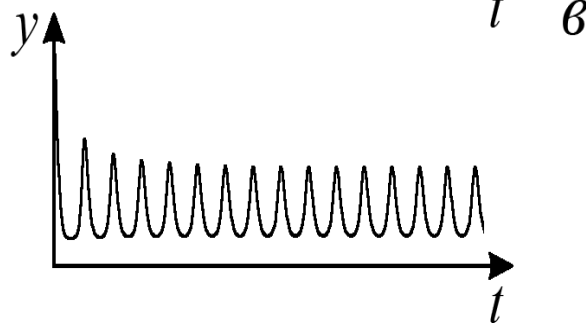
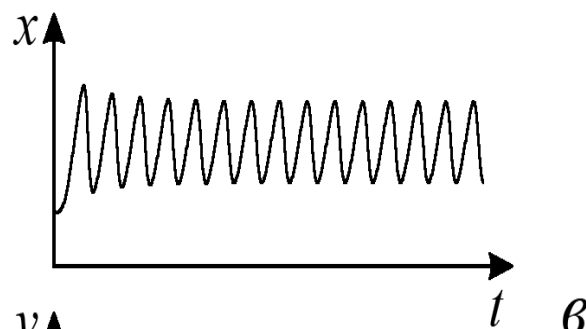
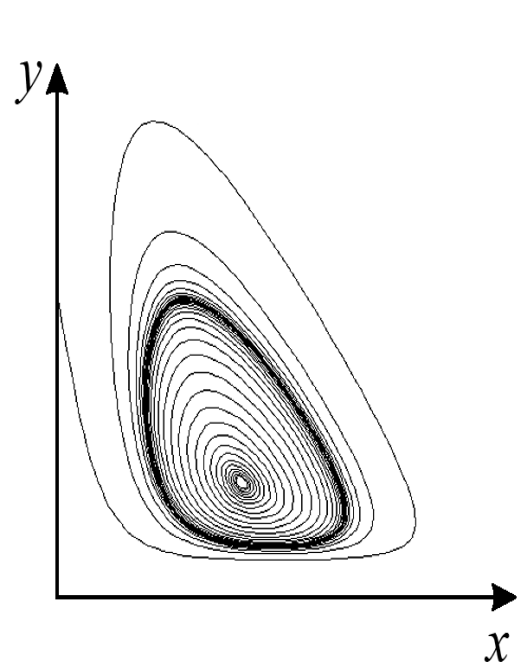
Фазовые портреты и кинетика

Устойчивые узел и фокус

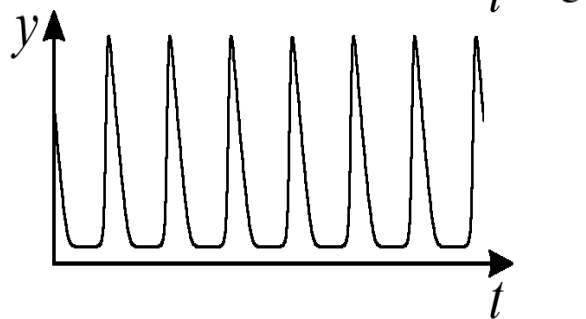
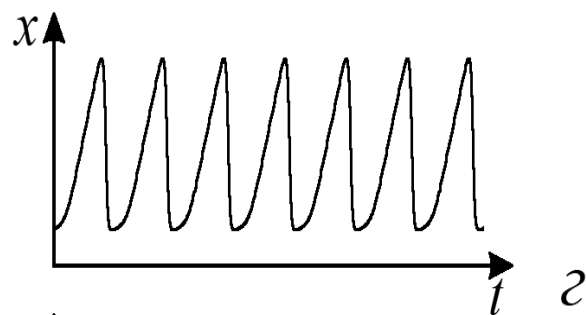
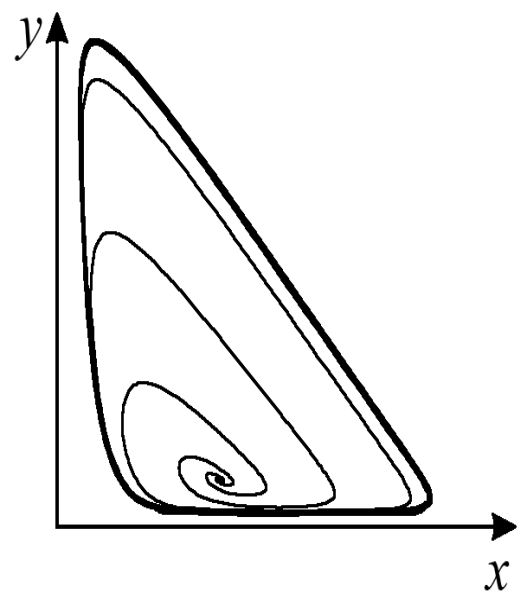


Модель гликолиза (8.10).
Кинетика изменений
концентраций
фруктозо-6-фосфата (x) и
фруктозодифосфата (y)
(справа) и фазовый портрет
системы (слева) при разных
значениях параметров
системы,
 a – бесколебательный процесс
(узел на фазовой плоскости),
 $\alpha = 0.25$; $r = 1$. b – затухающие
колебания (устойчивый фокус
на фазовой плоскости),
 $\alpha = 0.25$; $r = 0.2$.

Предельные циклы в гликолизе



v — колебания с постоянной амплитудой и фазой (предельный цикл на фазовой плоскости), $\alpha = 6$; $r = 0.24$. z — релаксационные колебания с постоянной амплитудой и фазой (предельный цикл почти треугольной формы на фазовой плоскости), $\alpha = 8$; $r = 0.5$.



Колебания кальция в клетках млекопитающих

Клетка	Стимул	Время между осцилляциями, с	Метод регистрации	Литературный источник
Ацинарные клетки околоушной железы	Карбахолин	5	Фура-2	Gray 1988
Гонадотропные клетки гипофиза	Гонадолиберин	6	"	Shangold ea 1988
Бета клетки поджелудочной железы	Карбахолин	12-25	"	Prentki ea 1988
Гладкомышечные клетки	Фенилэфрин, гистамин	30-48	"	Ambler ea 1988
Фибробласты (REF52)	Вазопрессин + грамицидин	35-100	"	Harootunian ea
Эндотелиальные клетки	Гистамин	40-125	"	Jacob ea 1988
Гепатоциты	Вазопрессин, фенилэфрин, ангиотензин II	18-240	Акворин	Woods ea 1986 Woods ea 1987
Кардиомиоциты	Кофеин	0,3-3	Сокращение	Kort ea 1985
Симпатические нейроны	"	120	Ток К+	Kuba ea 1976
Симпатические нейроны	Деполяризация и кофеин	60-120	Фура-2	Lipscombe ea 1988
Яйцеклетки хомячка	Оплодотворение	55	Акворин	Miysaki ea 1986
Ооциты мыши	Форболовый эфир	17-35	"	Cuthbertson, Cobbold 1985
В-лимфоциты	Антиген	50-75	Фура-2	Wilson ea 1987
Макрофаги	Распластывание	19-69	"	Kruskal, Maxfield 1987
Яйцеклетка хомячка	Тимеросал	300	Ток К+	Swann 1991
Гепатоциты	Желчная кислота	5-12 (1 тип)	"	Capiod ea 1991a
"	цАМФ	60-240 (2 тип)	"	Capiod ea 1991b

Внутриклеточные колебания кальция

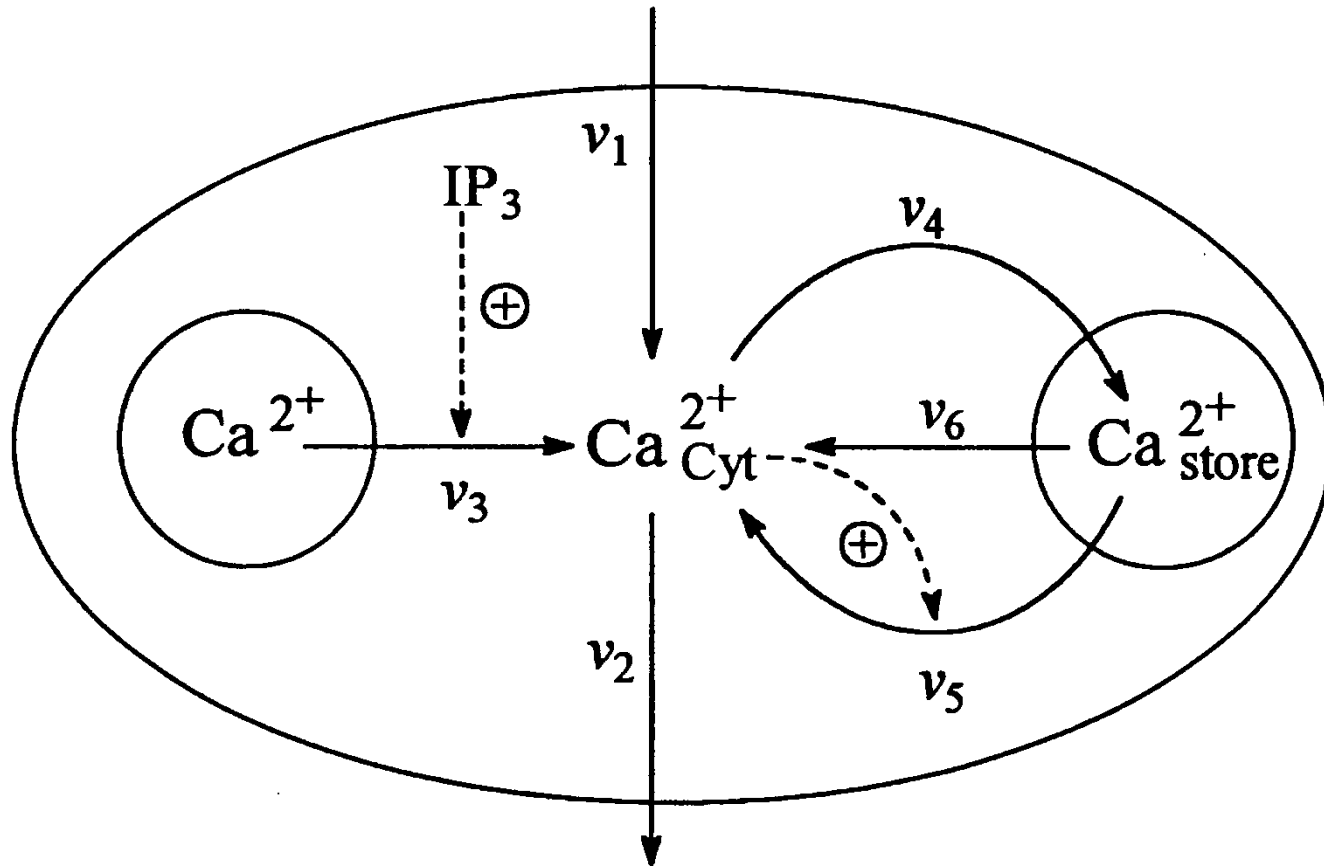
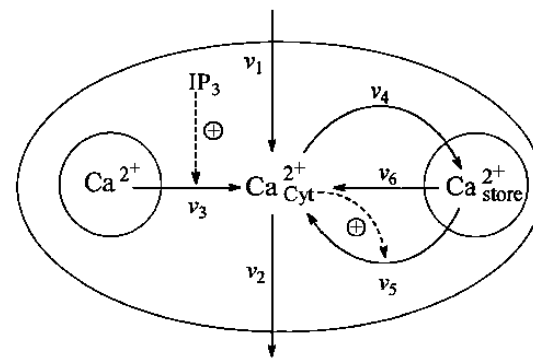


Схема процессов, приводящих к внутриклеточным колебаниям кальция (Dupont, Goldbeter, 1983).
 IP_3 - рецептор, стимулирующий колебания

Система уравнений для колебаний кальция



[Dupont and Goldbetter (1989, 1994)]. Рассматриваются приток и отток кальция в клетку через плазматическую мембрану (константы скоростей v_1 и v_2 , соответственно); гормонально активируемое освобождение кальция из пула (скорость v_3); активный транспорт цитозольного кальция в пул, (v_4), освобождение кальция из пула, активируемое цитозольным кальцием (v_5); свободный отток кальция из пула в цитозоль (v_6). Модель состоит из двух дифференциальных уравнений

S_1 – концентрация Ca в цитозоле; S_2 – в гормонально чувствительном пуле

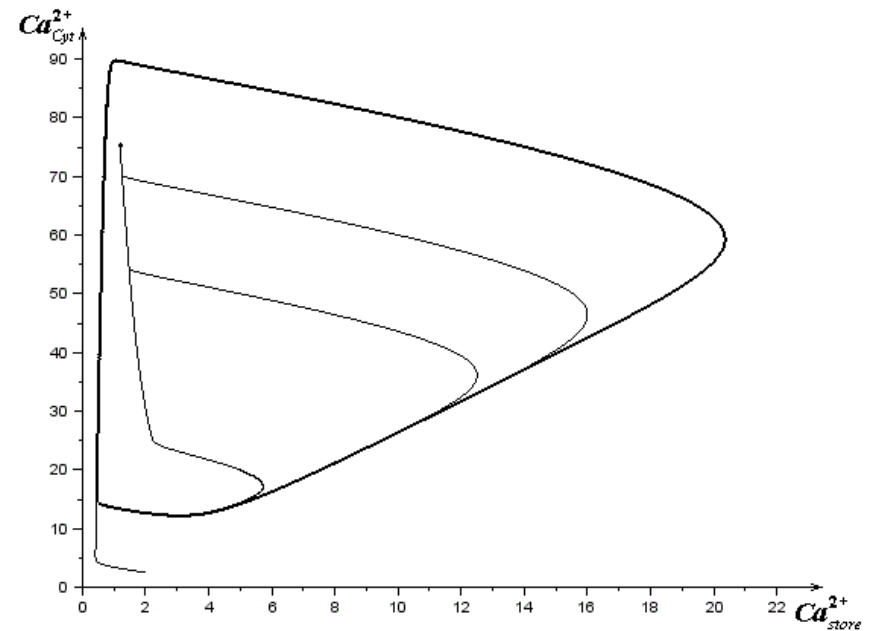
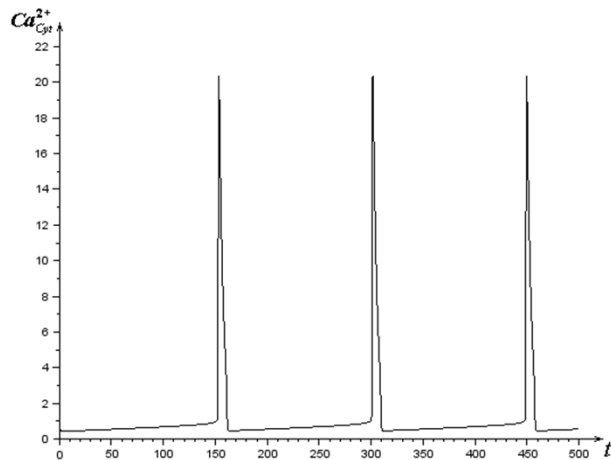
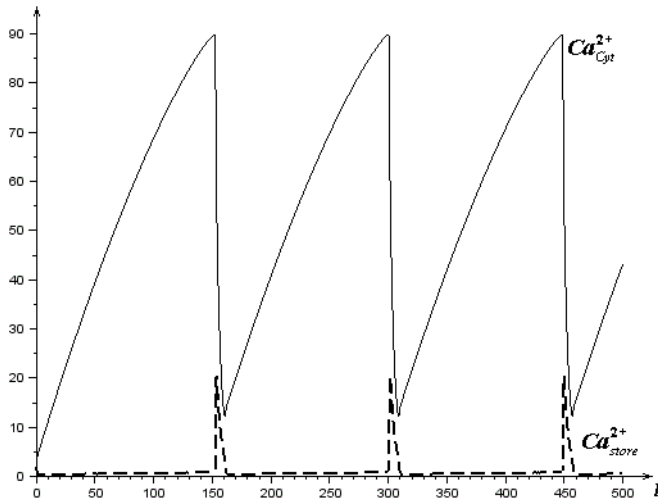
Выражения для скоростей:

$$\begin{aligned} \frac{dS_1}{dt} &= v_1 - v_2 + v_3 - v_4 + v_5 + v_6 & v_2 &= k_2 S_1; v_4 = k_4 S_1; \\ \frac{dS_2}{dt} &= v_4 - v_5 - v_6 & v_5 &= \frac{k_5 S_2 S_1^{nH}}{K_{0..5}^{nH} + S_1^{nH}}; v_6 = k_6 S_2 \end{aligned}$$

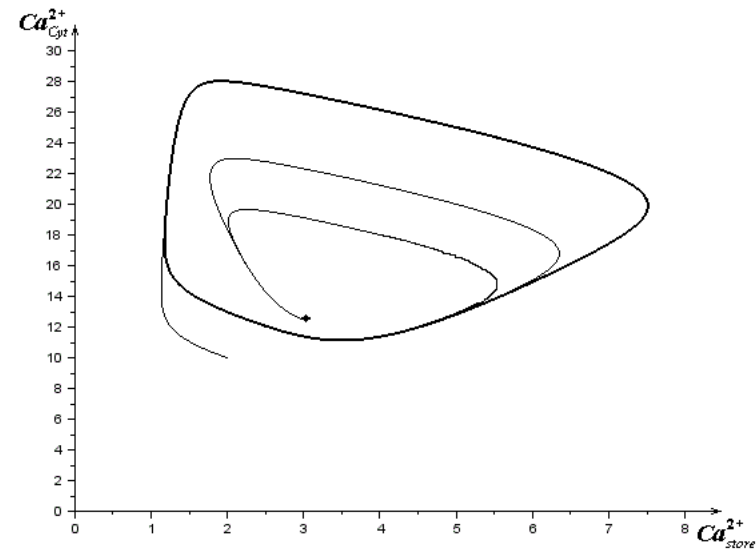
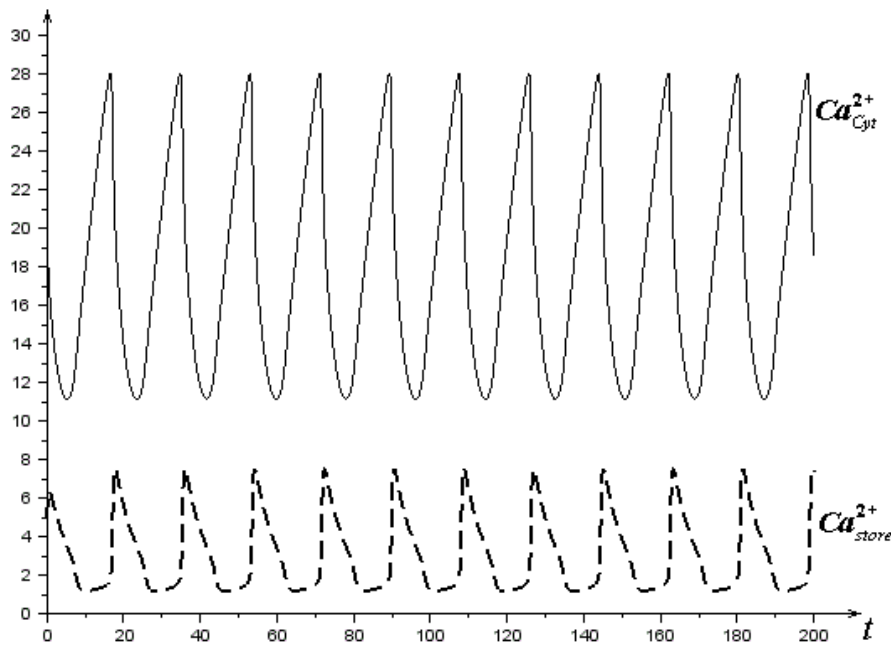
Kinetics the oscillations of Ca^{2+} in cytosol and in the store according to the model. Values of

parameters: ; $k_2 = 1; k_4 = 2; k_5 = 1; k_6 = 0.01; nH = 4; K_{0.5} = 3.1$

Приток Са $v_1 = 1.2$



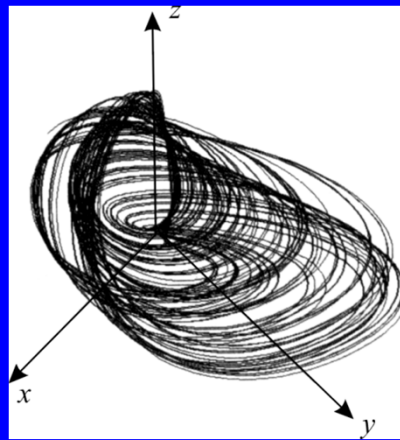
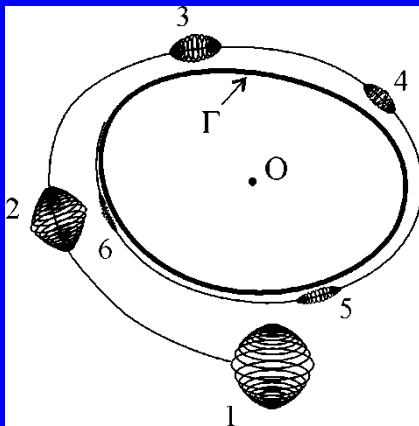
При большей скорости притока колебания
приближаются к гармоническим



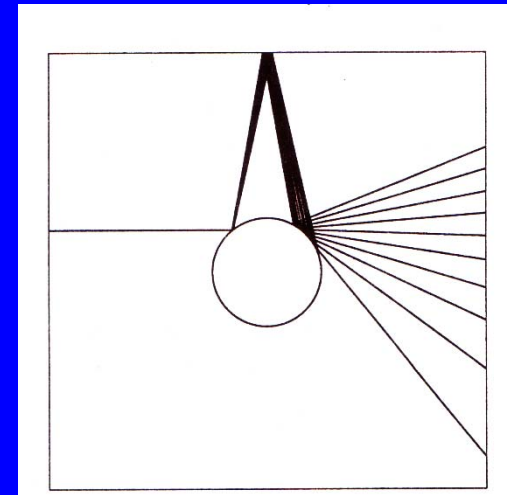
$$\nu_1 = 3$$

Вопросы

- Приведите примеры колебательных процессов в живых системах
- Какие колебательные процессы присутствуют в системе, которую Вы изучаете (хотели бы изучать). Какие у них характерные периоды и амплитуда?



Г.Ю Ризниченко



Динамический хаос

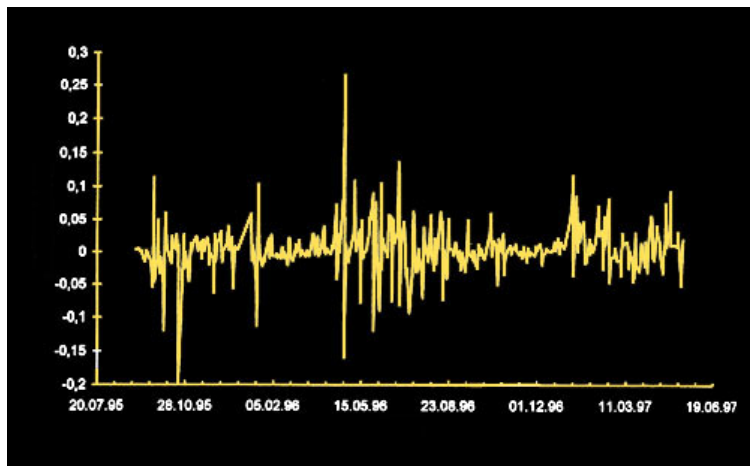


Фото Роберта Гендлера.

Созвездие стрельца

- Бесформенная совокупность материи и пространства (Противоположно Космосу – упорядоченности). Все рождается из Хаоса (древнегреческое).
- Беспорядок, неразбериха, смешение. Значение появилось в ранне-христианские времена

Потребность в
определенности —
естественная биологическая
потребность человека,
но она же — порок мышления



Динамика биржевых индексов

Мы живем не в
Среднестане, а в
Крайнестане



Динамический хаос.

Основные понятия

- *Основные понятия теории динамических систем.*
- *Предельные множества. Аттракторы.*
- *Странные аттракторы. Динамический хаос.*
- *Размерность странных аттракторов.*
Фракталы

χαος

CHAOS

Weather

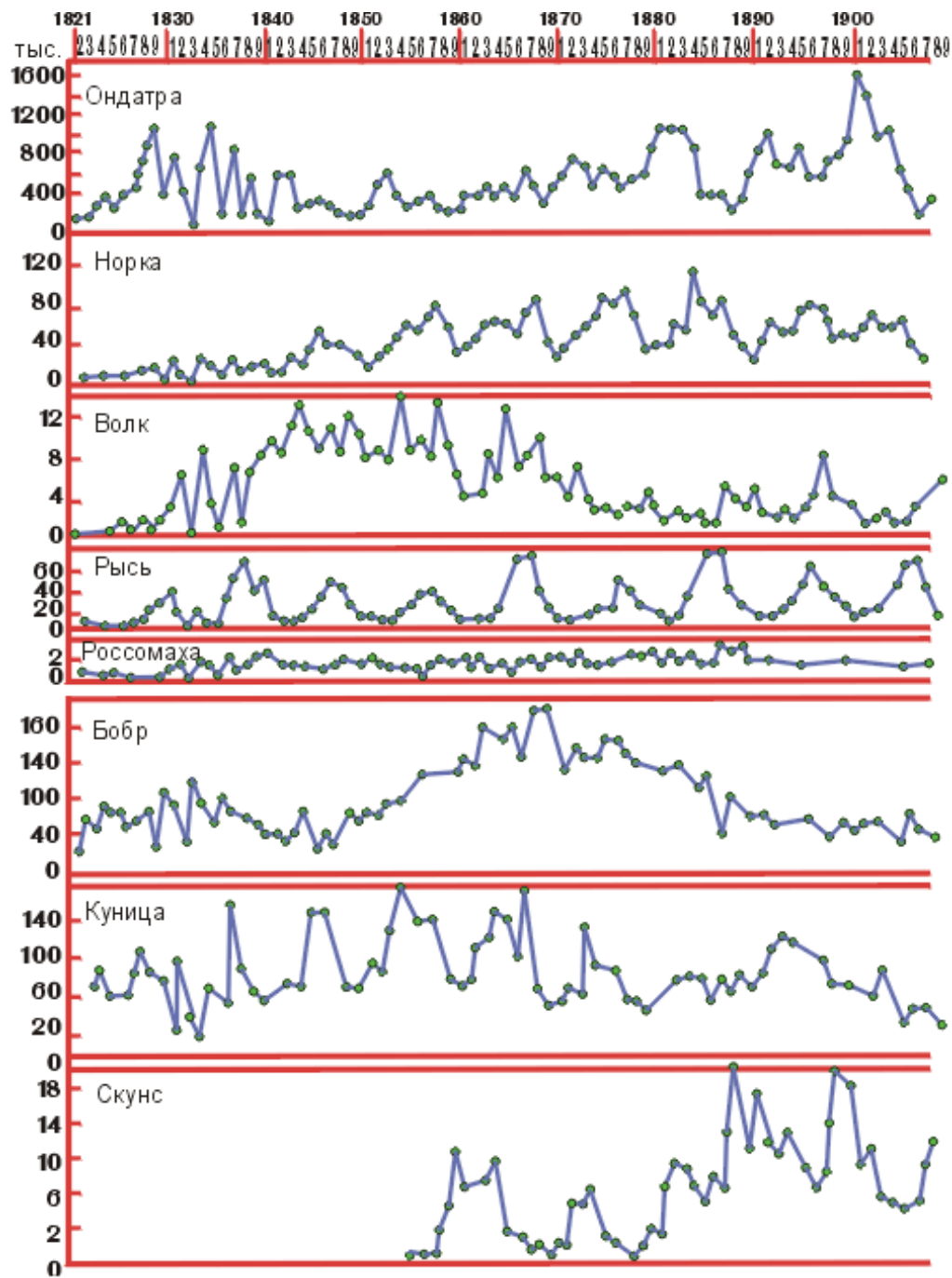


Chemical
Kinetics



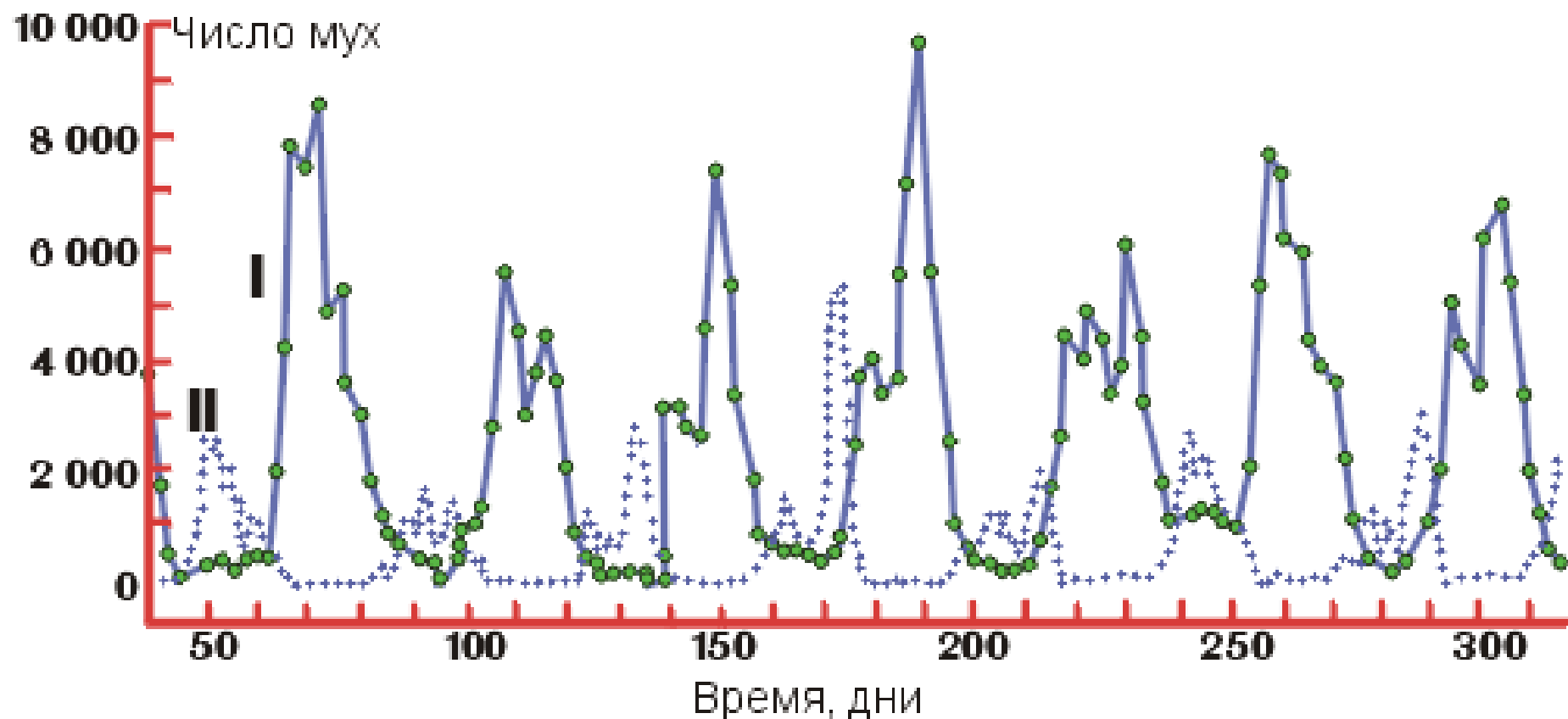
Heart rythm





Данные по
заготовкам
пушнины
компании
Гудзонова
Залива

Динамика численности плодовой мушки



Анри Пуанкаре —

великий французский математик
в книге «Наука и метод» в 1908 г. писал:

«В неустойчивых системах
совершенно ничтожная причина,
ускользающая от нас по своей
малости, вызывает значительные
действия, которые мы не в
состоянии предугадать...
Предсказание становится
невозможным, мы имеем перед
собой явление случайное».



Лоренц

Lorenz EN (1963)
Deterministic non-periodic
flow. J.Atmos. Sci: 20, 131-141

Конвекция в подогреваемом снизу слое жидкости,
модель водяного колеса, одномодовый лазер, диссипативный
осциллятор с инерционным возбуждением

$$\dot{x} = \sigma y - \sigma x,$$

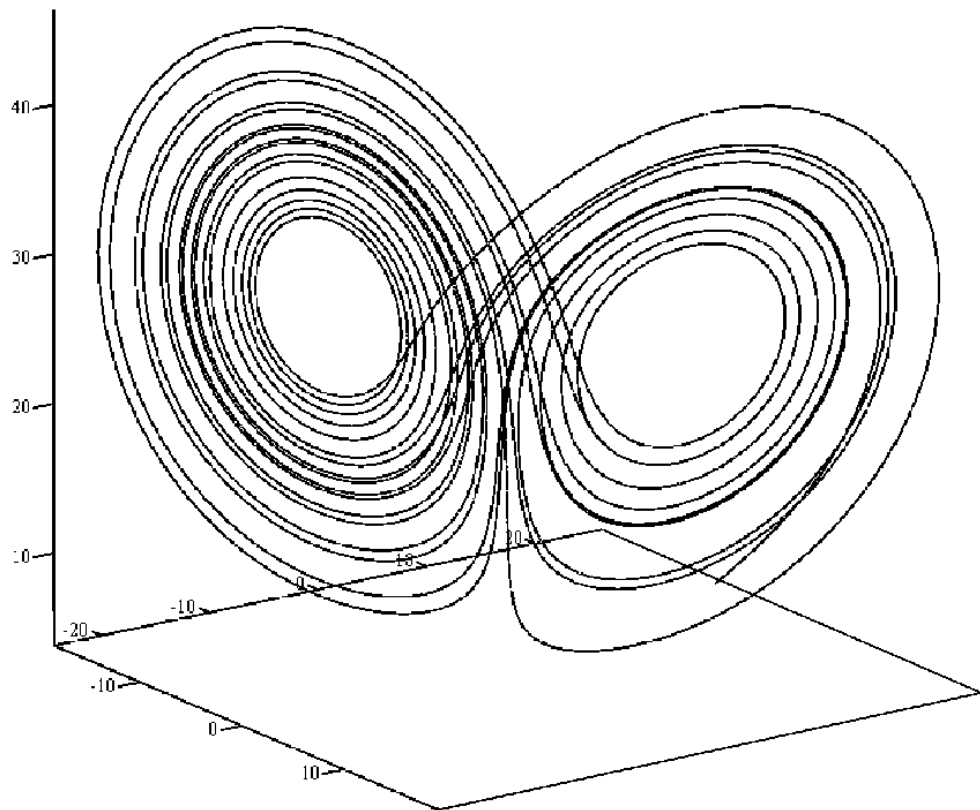
$$\dot{y} = rx - y - xz,$$

$$\dot{z} = xy - bz.$$

$$r=28, s=10,$$

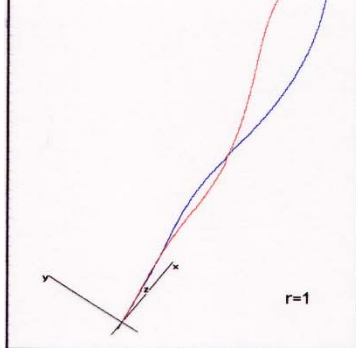
$$b=8/3$$

Хаотические траектории в
системе Лоренца

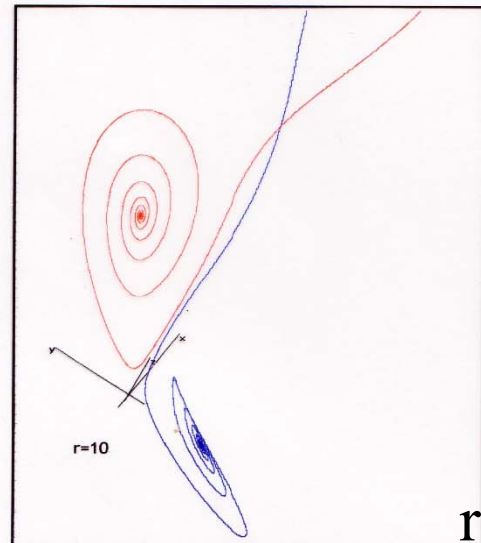
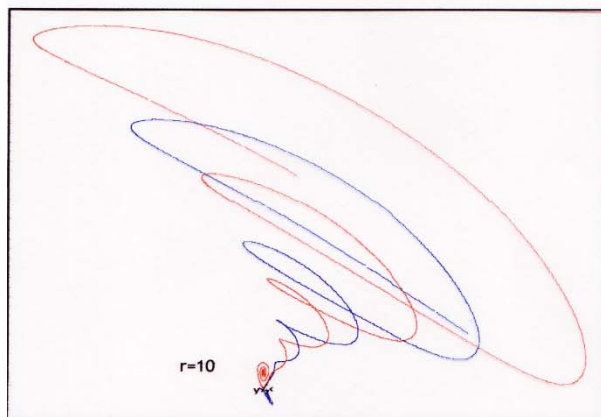


Траектории системы Лоренца при разных значениях параметра r

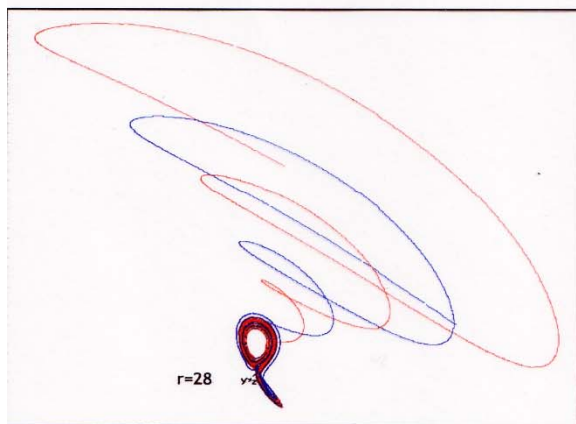
Игорь Федик
каф. биофизики



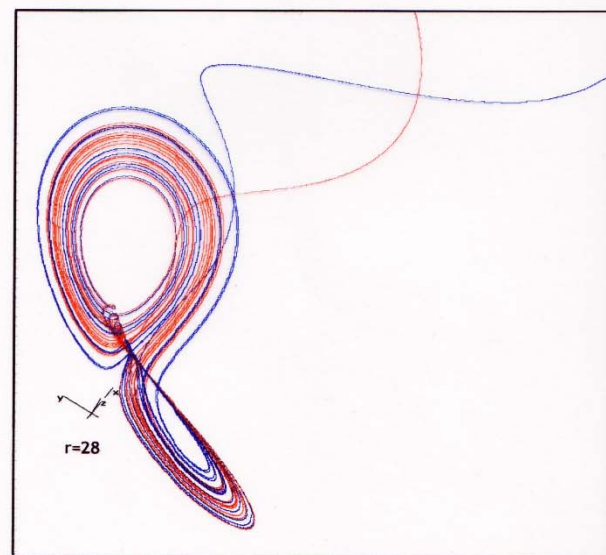
$r=1$



$r=10$

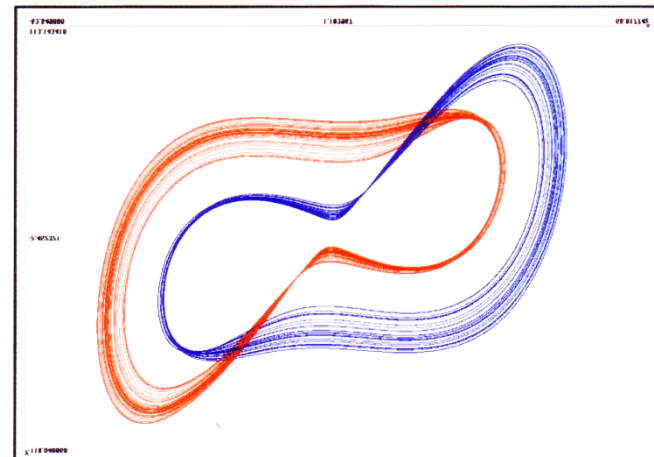
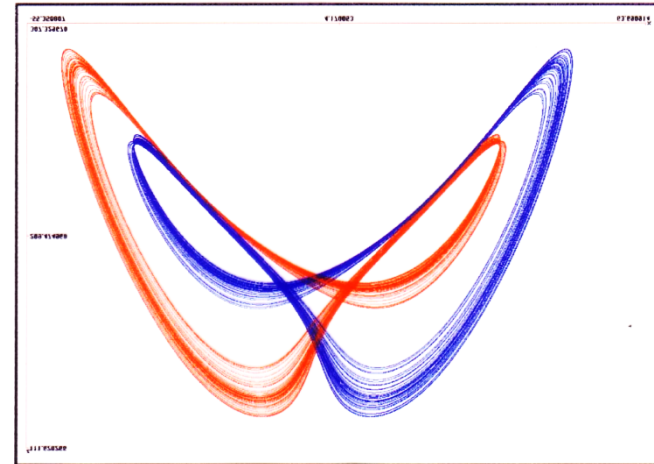
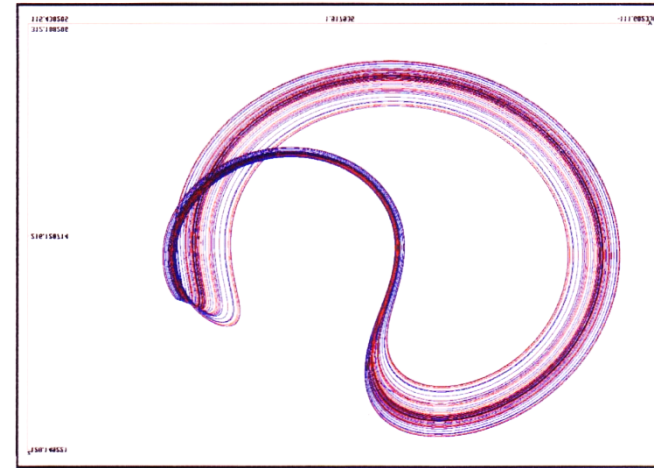
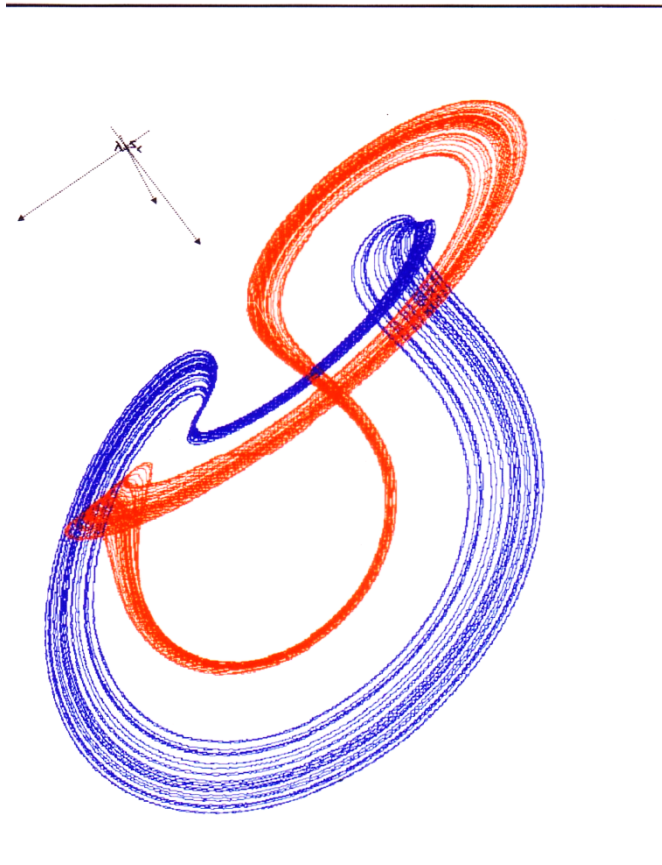


$r=28$





Edward Norton
Lorenz
1917-2008
Американский
математик и
метеоролог
Один из основателей
теории хаоса

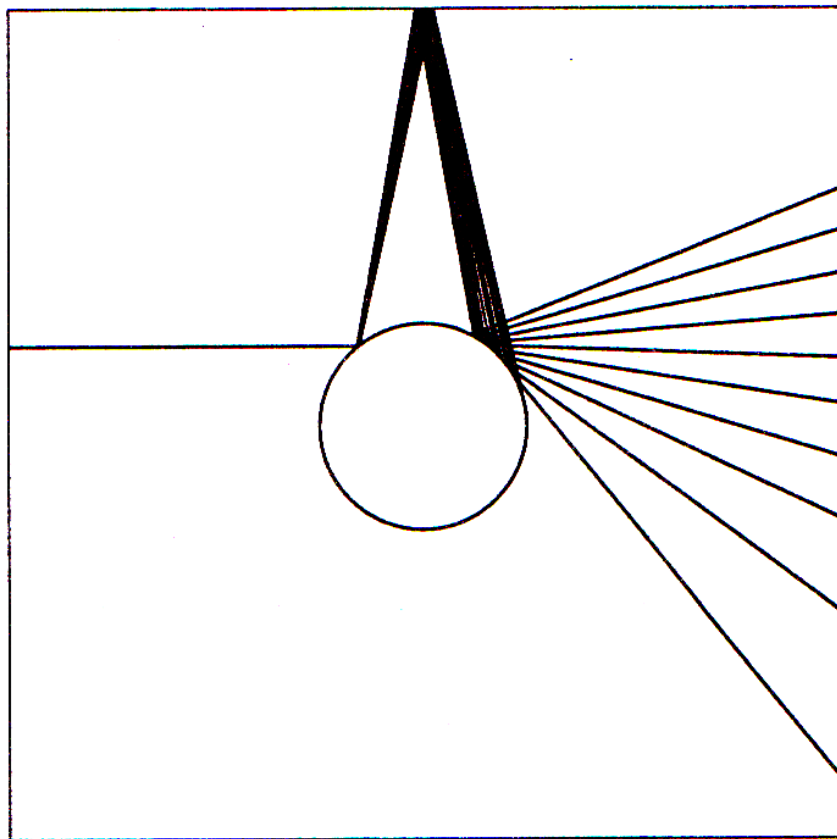


Хаотическое поведение возникает

- ☐ ● не из-за внешних источников шума (их нет в системе Лоренца);
- ☐ ● не из-за бесконечного количества степеней свободы (их три в системе Лоренца);
- ☐ ● не из-за неопределенности, связанной с квантовой механикой (рассматриваемые системы чисто классические).

Настоящая причина нерегулярности определяется свойством нелинейных систем экспоненциально быстро разводить первоначально близкие траектории в ограниченной области фазового пространства

Разбегание траекторий



Хаотическое поведение означает

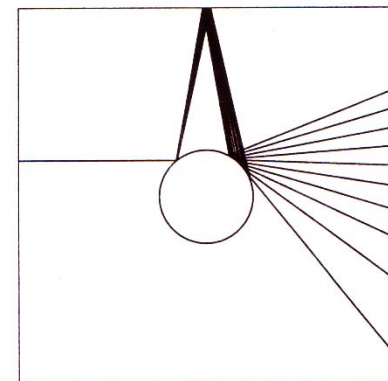
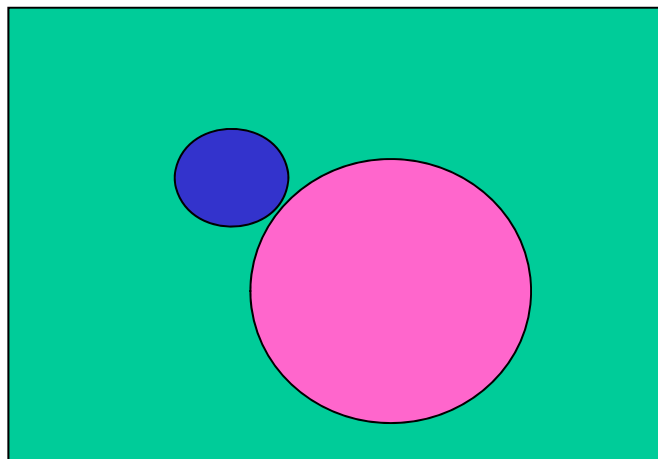
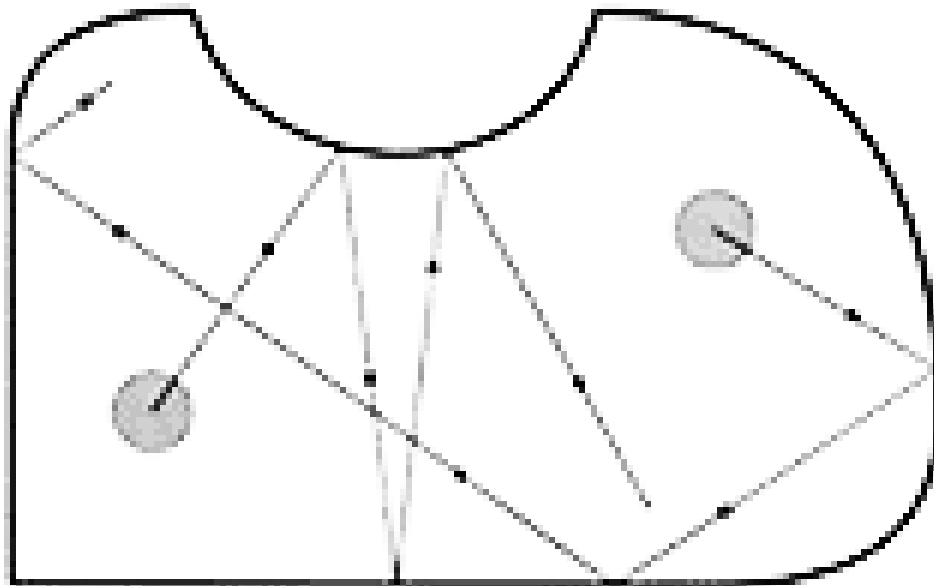
- *неустойчивость фазовых траекторий,*
- *рост малого начального возмущения во времени,*
- *перемешивание элементов фазового объема, и, как следствие,*
- *непредсказуемость поведения системы на больших временах*



Яков Григорьевич
Синай

Профессор Мехмата МГУ.
Работы по теории
динамических систем,
статистической физике

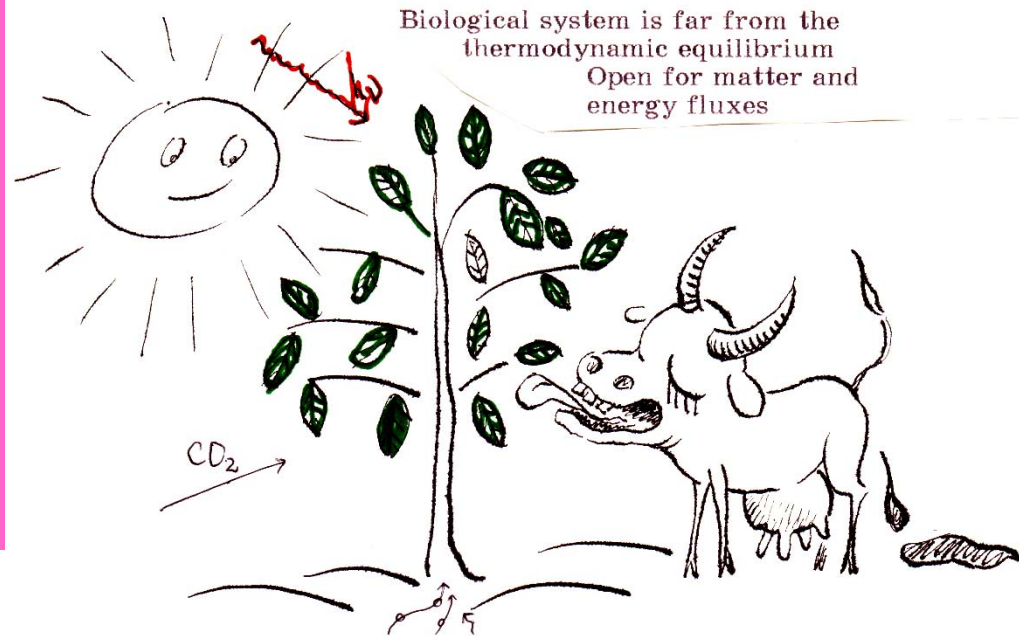
Биллиард Синая



НЕЛИНЕЙНОСТЬ

- является необходимым (но не достаточным) условием существования динамического (детерминированного) хаоса

Линейные дифференциальные и разностные уравнения не приводят к хаосу.



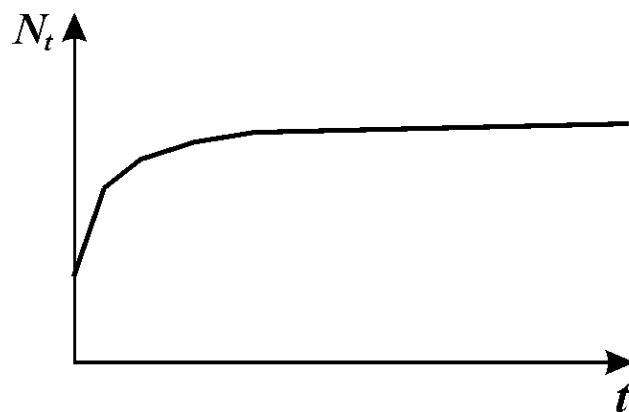
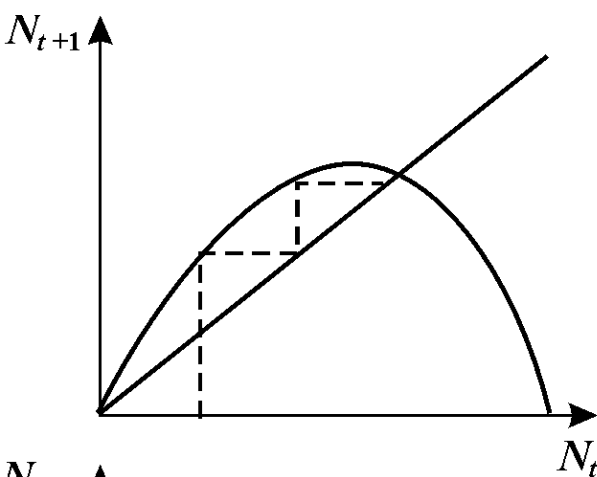
Детерминированные системы

однозначно задан закон изменения системы с течением времени.

Детерминированность означает, что зависимость будущего состояния $x(t)$ можно записать в виде:

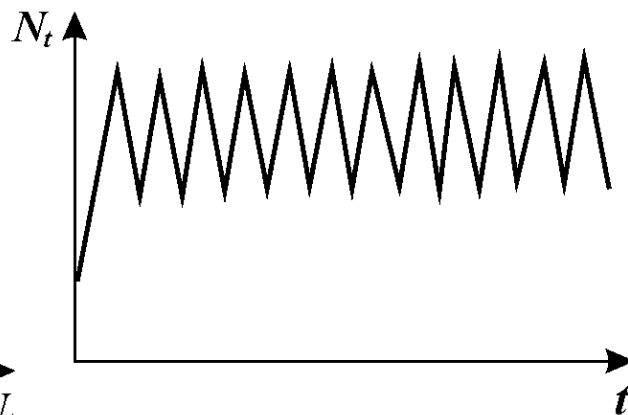
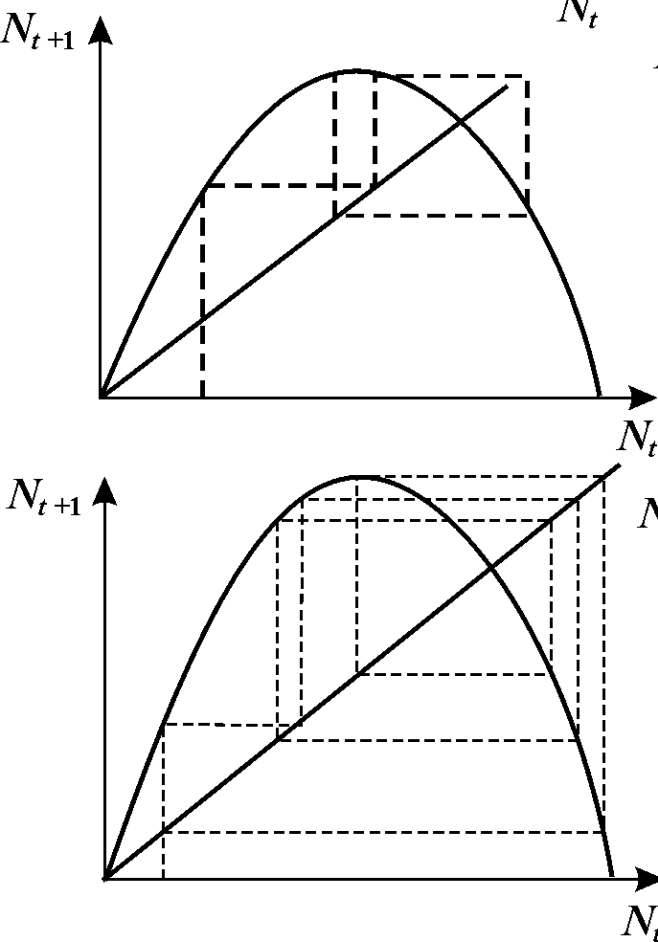
$$x(t) = F [x(t_0)] .$$

Здесь F – детерминированный закон (оператор), который осуществляет строго однозначное преобразование начального состояния $x(t_0)$ в будущее состояние $x(t)$ для любого $t > t_0$.

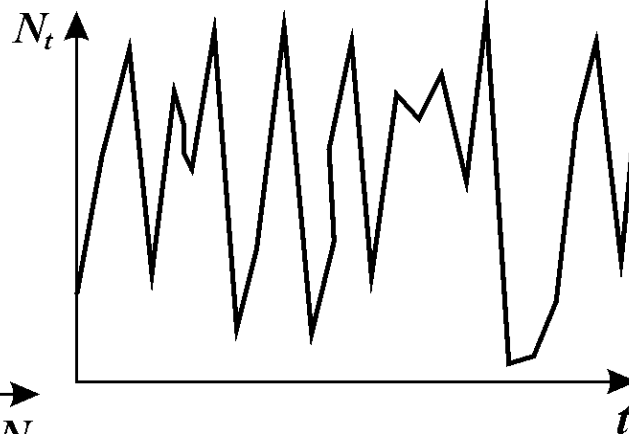
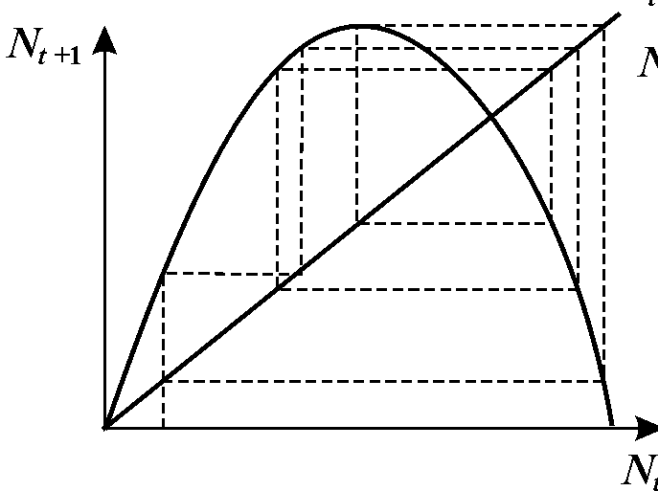


a Квадратичное
отображение

$$N_{t+1} = aN_t(1 - N_t)$$



б

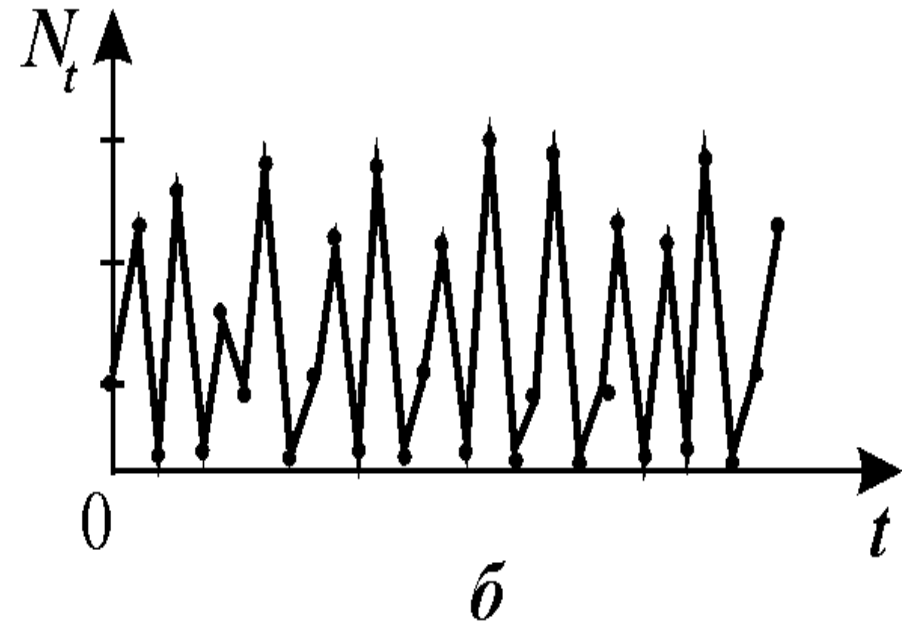
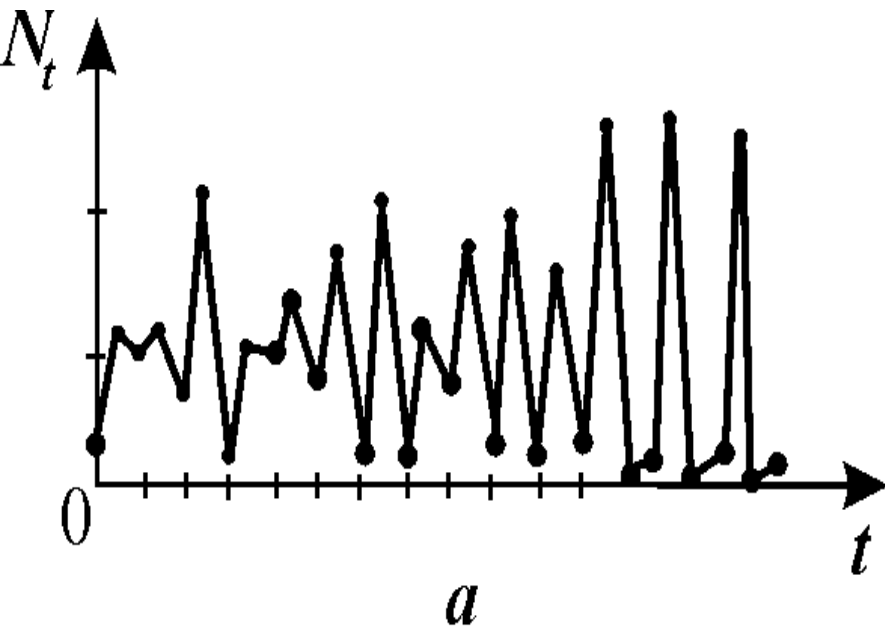


в

Пример
детерминиро-
ванного
хаоса

$$N_{t+1} = N_t \exp\left\{r\left(1 - \frac{N_t}{K}\right)\right\}$$

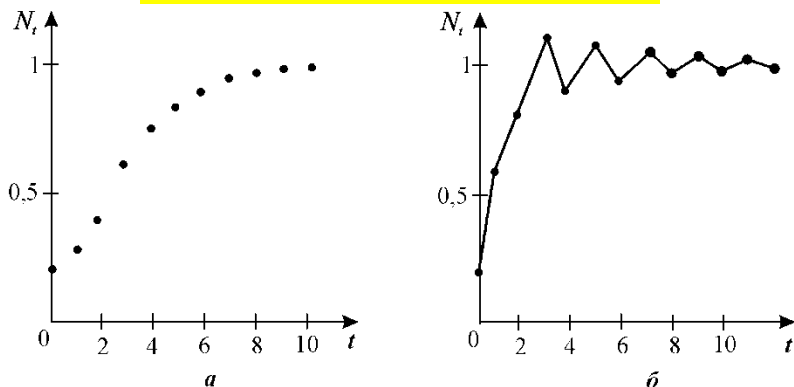
Дискретный аналог
логистического уравнения



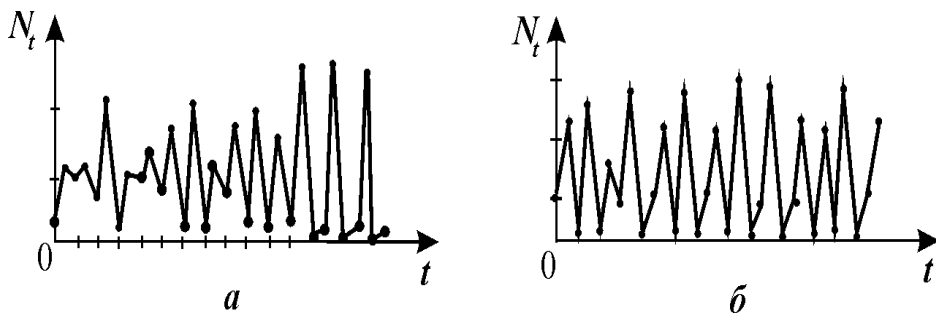
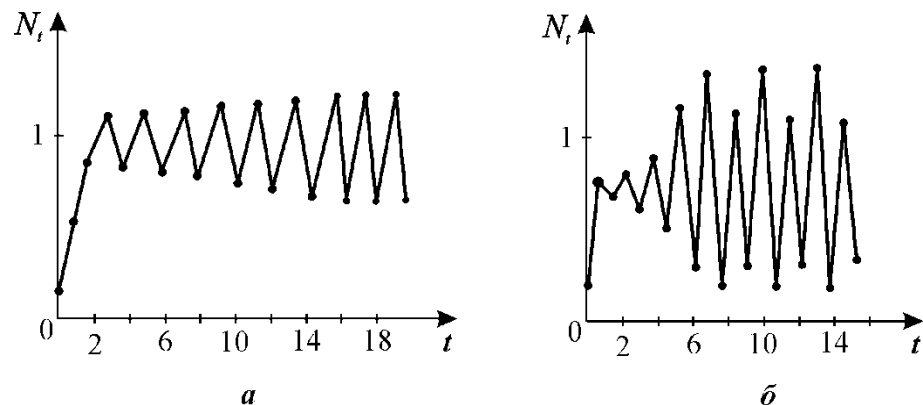
При $r > r_c = 3,102$ решение зависит от начальных условий существуют *трехточечные циклы* и *квазистохастические решения*.

Равновесие устойчиво, если $0 < r < 2$,
 решение монотонно при $0 < r < 1$ и представляет собой затухающие колебания
 при $1 < r < 2$
 при $2 < r = r_2 < 2,526$ – двухточечные циклы;
 при $r_2 < r < r_c$ появляются циклы длины $4, 8, 16, \dots, 2^k$
 при $r > r_c = 3,102$ решение зависит от начальных условий. Существуют
 трехточечные циклы и квазистохастические решения

Устойчивое решение



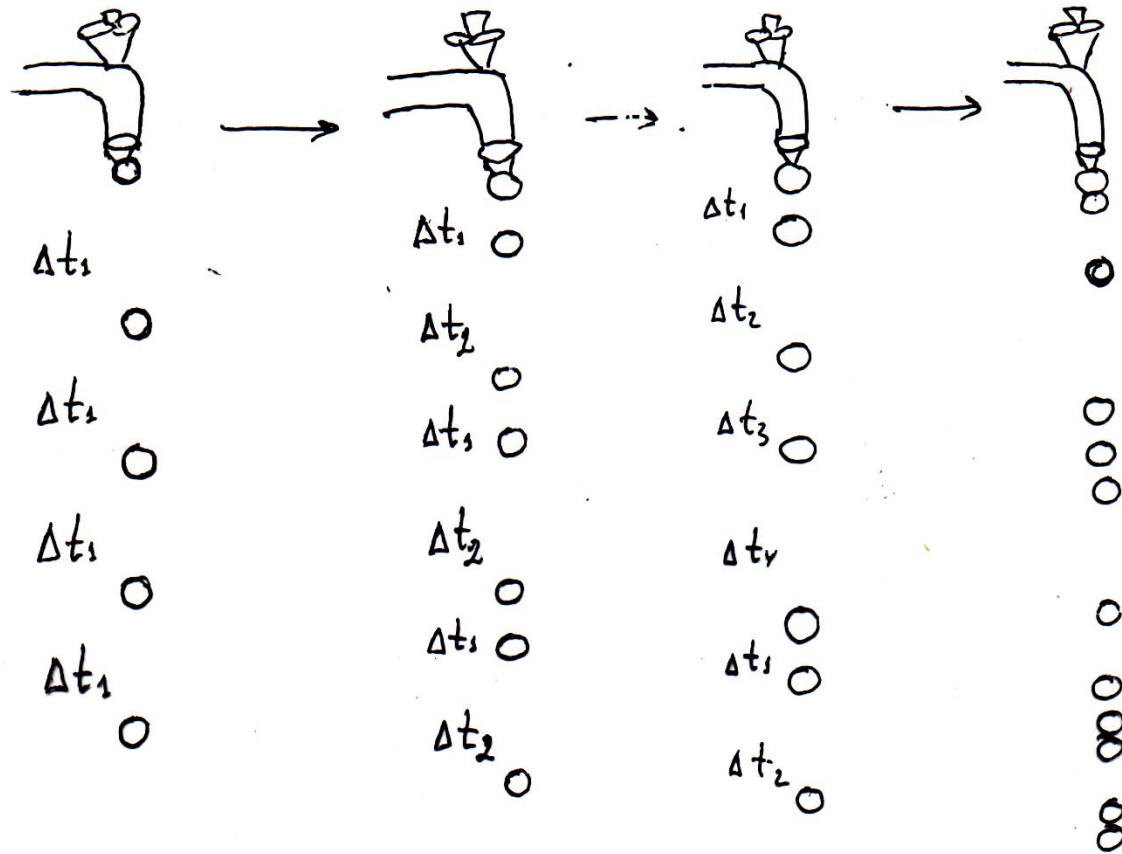
Циклы длины 2^k



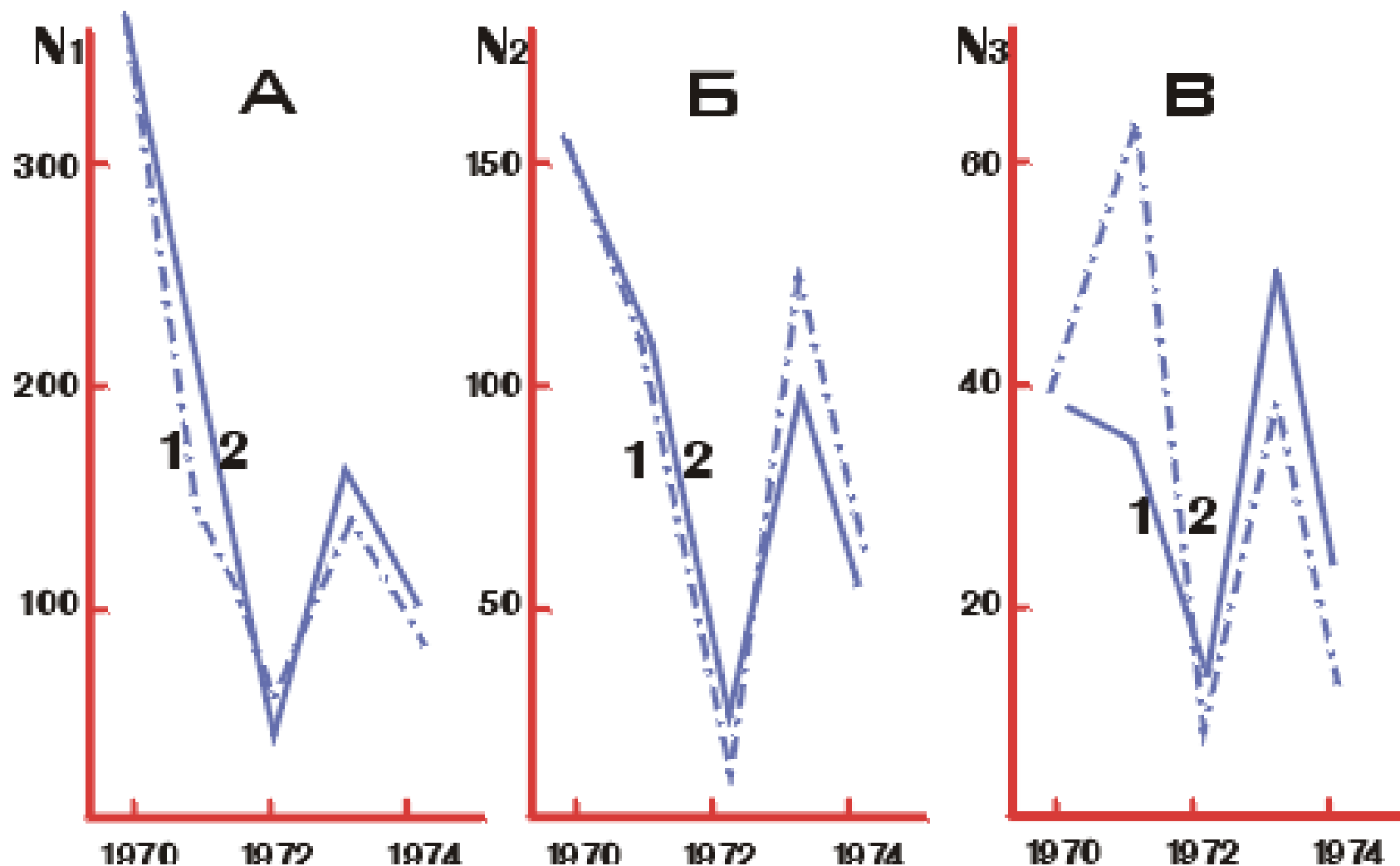
Динамический хаос

$$N_{t+1} = N_t \exp \left\{ r \left(1 - \frac{N_t}{K} \right) \right\}$$

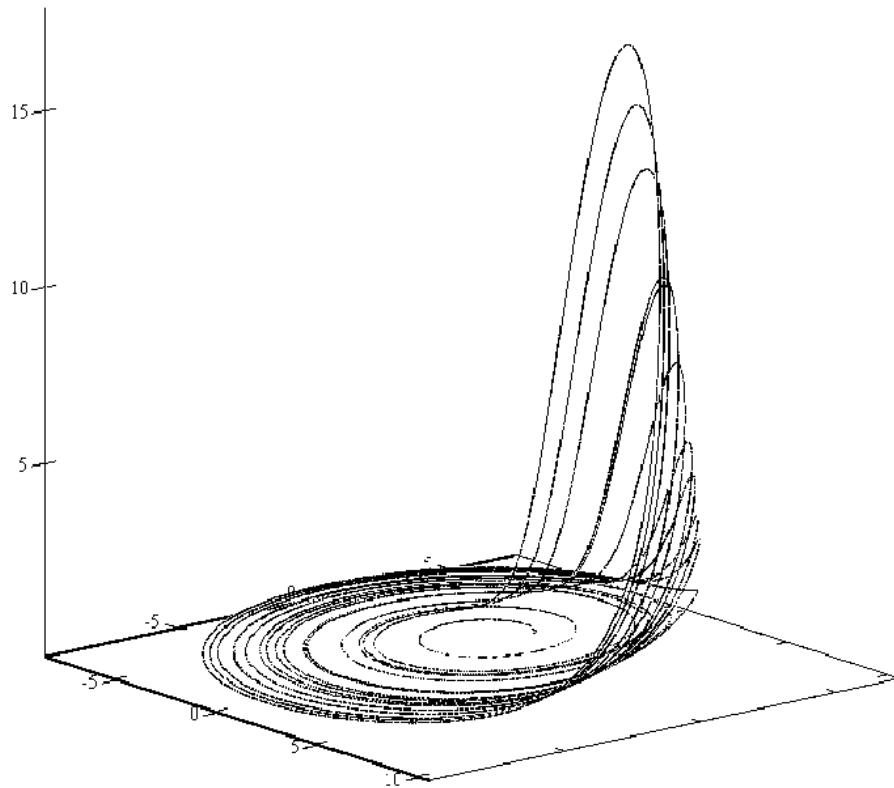
Переход к хаосу через удвоение периода



Динамика биомассы овсеца



Хаос в непрерывной системе. Аттрактор Ресслера



$$\begin{aligned}\dot{x} &= -(x + y), \\ \dot{y} &= x + \alpha y, \\ \dot{z} &= \alpha + z(x - \mu).\end{aligned}$$

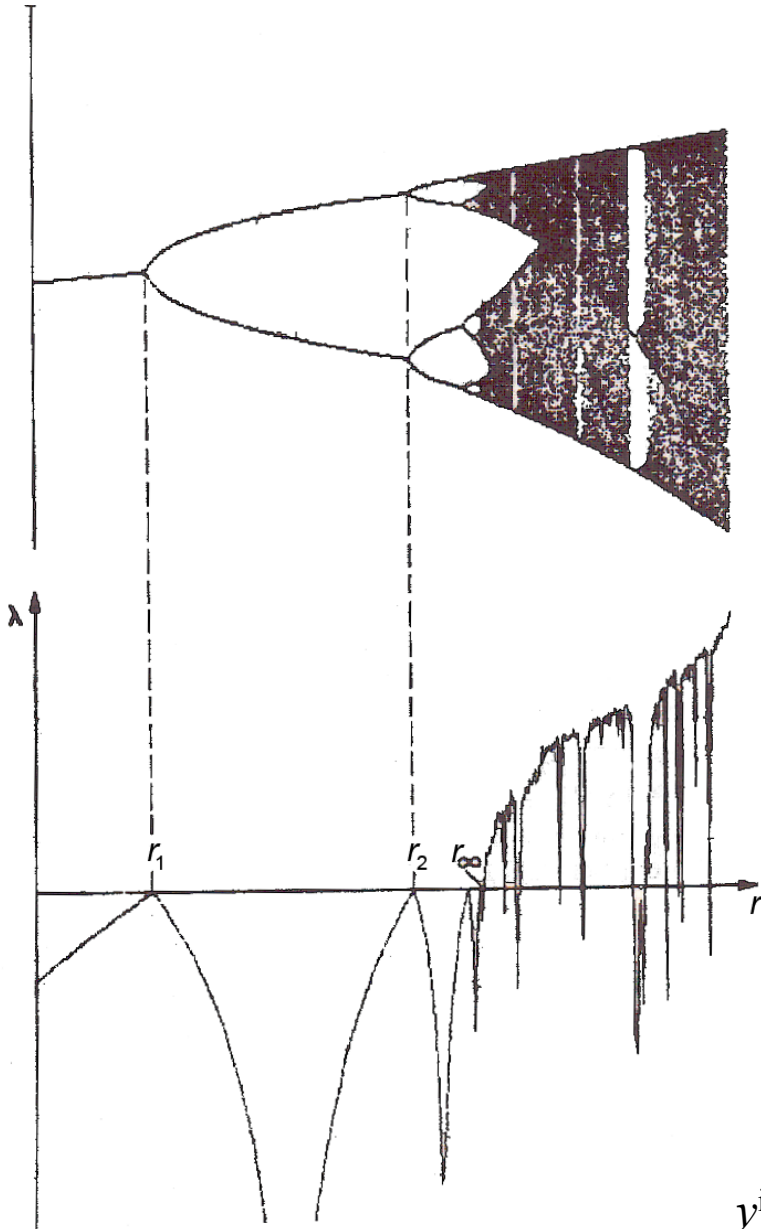
Устойчивость и неустойчивость движения

Устойчивость по Ляпунову

Для *устойчивого по Ляпунову* движения малое начальное возмущение не нарастает. Т.е. *движение устойчиво по Ляпунову*, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta(\varepsilon)$, что для всякого движения $\mathbf{x}(t)$, для которого $||\mathbf{x}(t_0) - \mathbf{x}^*(t_0)|| < \delta$, при всех $t > t_0$ выполняется неравенство: $||\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*(t)|| < \varepsilon$.

Знак $|| \quad ||$ означает норму (длину) вектора.

Сценарий удвоения предельного цикла

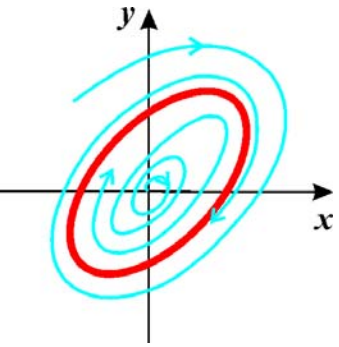


Показатель Ляпунова —
характеризует
устойчивость
траектории

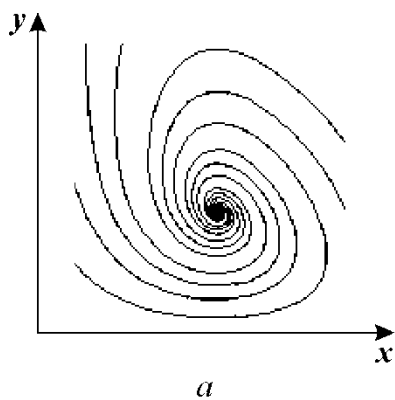
$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t - t_0} \ln \|y^i(t)\|.$$

$y^i(t)$ — величина возмущения

Устойчивость по Пуассону



предполагает, что соответствующая фазовая траектория при $t \rightarrow \infty$ не покидает ограниченной области фазового пространства. Находясь в этой области бесконечно долго, она неизбежно будет возвращаться в сколь угодно малую окрестность начальной точки. Времена возврата могут соответствовать *периоду* или *квазипериоду* при регулярном движении, а могут представлять собой случайную последовательность, если решение отвечает режиму динамического хаоса.



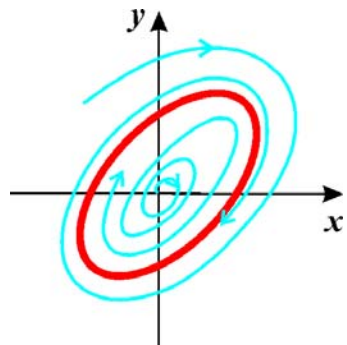
Устойчивый
фокус



Устойчивый узел

Аттрактор.

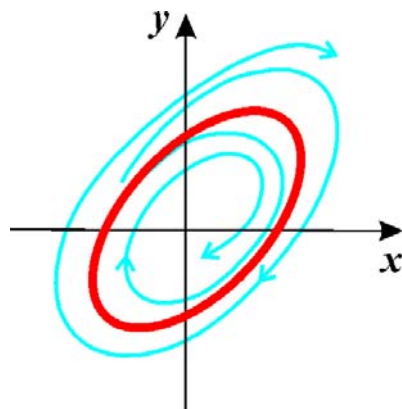
- Если все точки множества V будут принадлежать L при $t \rightarrow +\infty$, то L – *притягивающее предельное множество, или аттрактор*. Тогда V – *бассейн притяжения аттрактора* (подобно бассейну реки – территории, с которой она собирает свои воды).



Устойчивый
предельный цикл

Репеллер

- Если все точки множества V будут принадлежать L при $t \rightarrow -\infty$, то L — отталкивающее предельное множество, или *репеллер*.



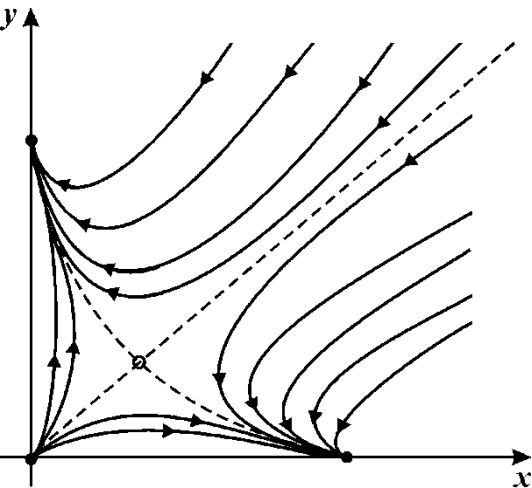
Неустойчивый
предельный цикл

Неустойчивый узел,

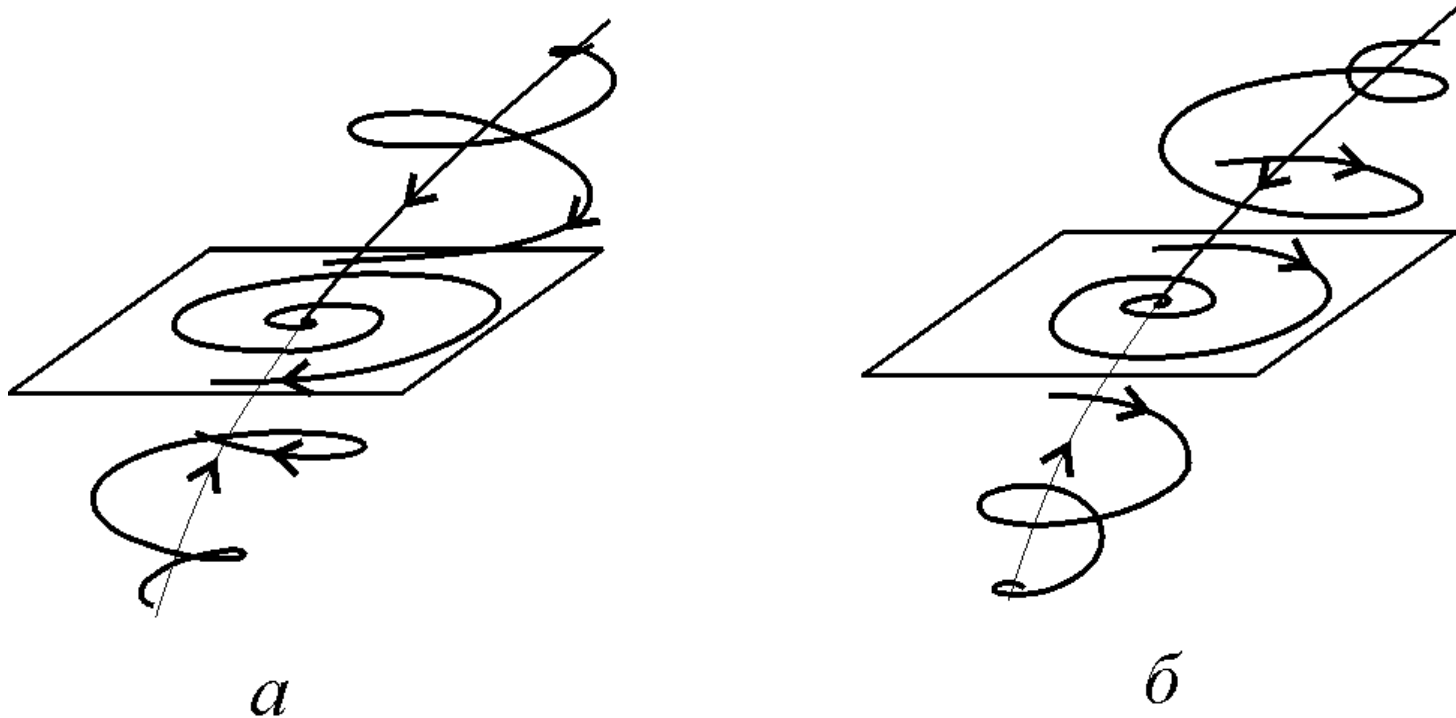
Неустойчивый фокус

Седловое множество

- Если множество V состоит из двух подмножеств $V = W^s \cup W^u$, причем точки, принадлежащие W^s , стремятся к L в прямом времени, а точки, принадлежащие W^u , стремятся к L в обратном времени, тогда L называется *седловым предельным множеством (или седлом)*. Множества W^s и W^u – устойчивое и неустойчивое многообразия седла.



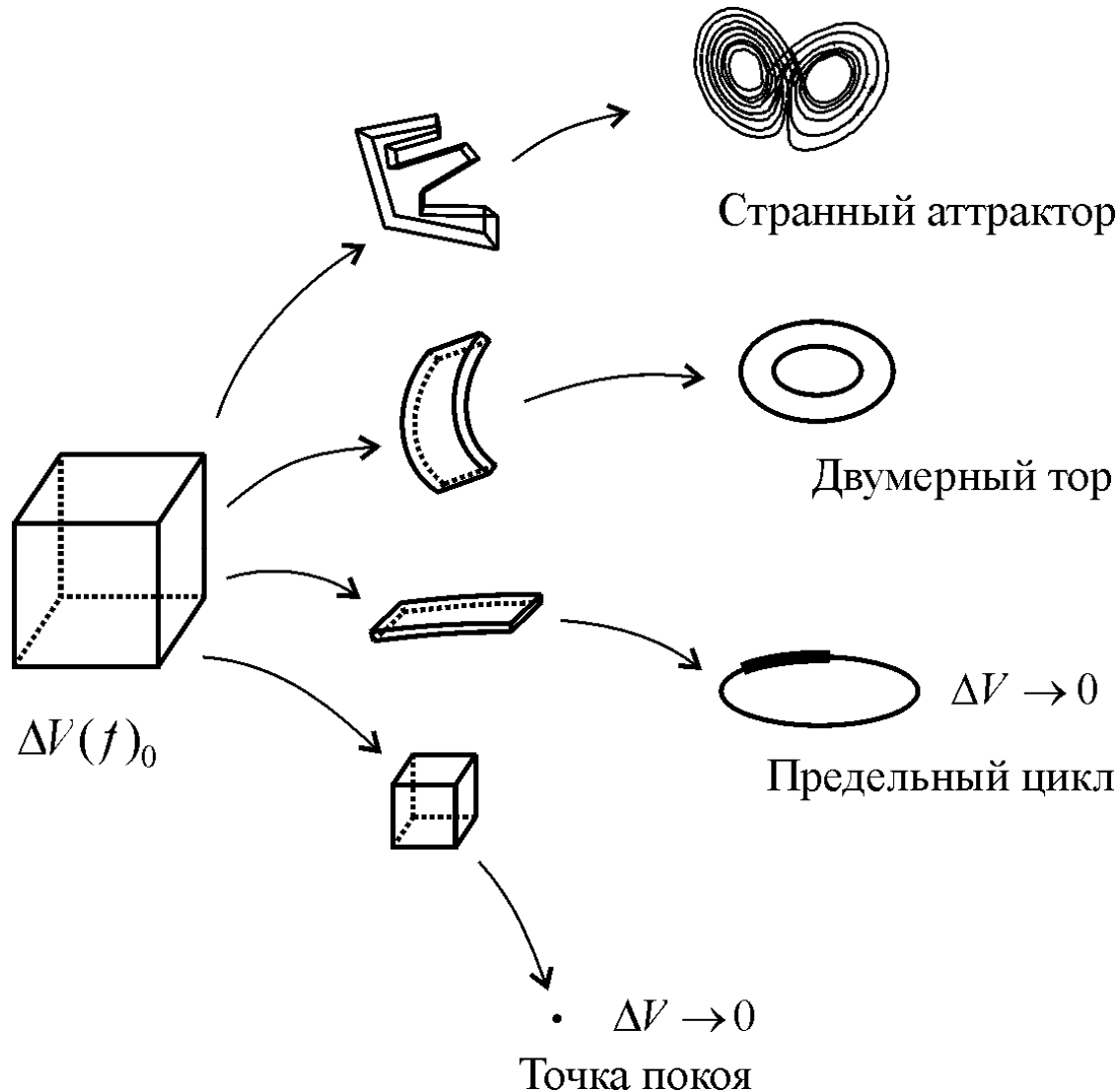
Седло-фокусы



Седло-фокусы в пространстве $N = 3$.

а) p_1 — действительно и отрицательно, $p_{2,3}$ — комплексно сопряженные, $\operatorname{Re} p_{2,3} > 0$; б) p_1 — действительно и положительно, $p_{2,3}$ — комплексно сопряженные, $\operatorname{Re} p_{2,3} < 0$

Диссипативные системы



Существование аттрактора в диссипативной системе связано со свойством сжатия элемента фазового объема под действием оператора эволюции.