Г.Ю.Ризниченко

Исследование одного уравнения

$$\frac{dx}{dt} = f(x).$$

Основные понятия (автономность)

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t).$$

Обыкновенное дифференциальное уравнение
1-го порядка

$$\frac{dx}{dt} = f(x).$$

Автономное уравнение. Правая часть не зависит явно от t

Переменные и параметры

$$\frac{dx}{dt} = ax + bxy + dx \sin wt$$

x, t – переменные

a,b,d,w - параметры

Стационарное состояние

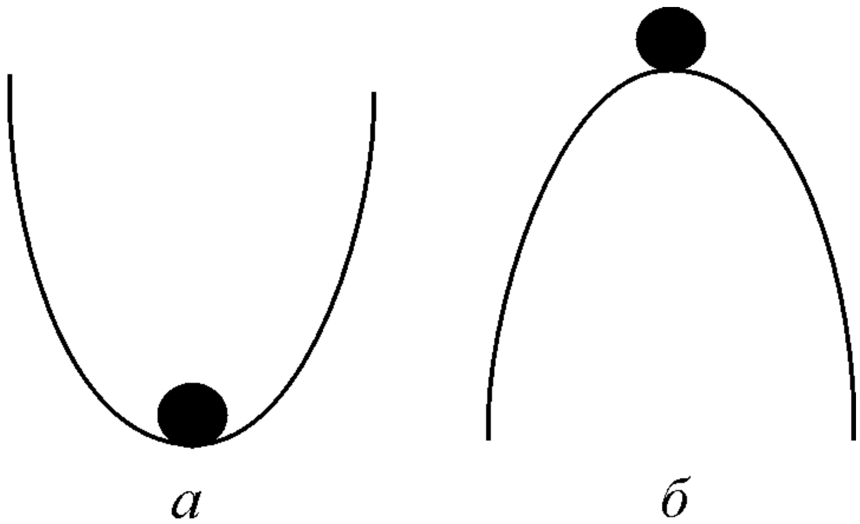
$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{\bar{x}} = 0$$

Скорость изменения переменной x равна нулю

$$f(\bar{x}) = 0$$

Правая часть уравнения равна нулю

Устойчивость стационарного состояния



Стационарное состояние устойчиво, если малые отклонения с течением времени остаются малыми

Метод Ляпунова
исследования устойчивости стационарного состояния

Метод линеаризации функции в окрестности стационарного состояния

Выразим переменную *x* через отклонение от стационарного значения:

$$x = \bar{x} + \xi \qquad \xi / \bar{x} << 1$$

$$\frac{d(\bar{x} + \xi)}{dt} = \frac{dx}{dt} = f(\bar{x} + \xi)$$

Правую часть разложим в ряд Тейлора в точке $\overline{x}$

$$\frac{d\xi}{dt} = f(\overline{x}) + f'(\overline{x})\xi + \frac{1}{2}f''(\overline{x})\xi^2 + \dots$$

Брук Тэйлор (1685-1731)

- Английский

математик, музыкант, живописец, философ.

Формула Тэйлора

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{n}(a)}{n!}(x-a)^{n}$$

Значение функции $f(x)$ в точке x в окрестности точки a выражается в виде степенного ряда

Отбросим члены более высокого порядка. Получим линеаризованное уравнение:

$$d\xi / dt = a_1 \xi,$$

Решение линеаризованного уравнения

$$\xi(t) = c \cdot \exp(\lambda t)$$

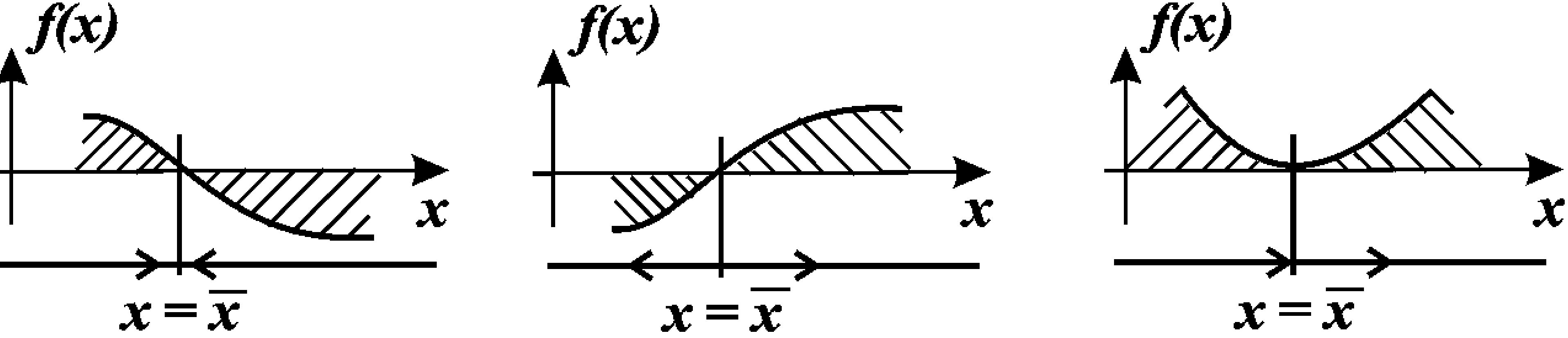
$$\lambda = a_1 = f'(\bar{x})$$

С – произвольная постоянная. С=ξ(0)

Метод Ляпунова

Устойчивость стационарного состояния уравнения $dx/dt=f(x)$ *определяется знаком производной правой части в стационарной точке. Если эта производная равна нулю, требуется рассмотрение в разложении* $f(x)$ *членов более высокого порядка*

Графический метод анализа устойчивости стационарного состояния



а устойчиво

б неустойчиво

в неустойчиво

Типы аттракторов

- *Устойчивая точка покоя*
- *Предельный цикл — режим колебаний с постоянными периодом и амплитудой (начиная с размерности системы 2)*
- *Области с квазистохастическим поведением траекторий в области аттрактора, например, «странный аттрактор» (начиная с размерности 3).*

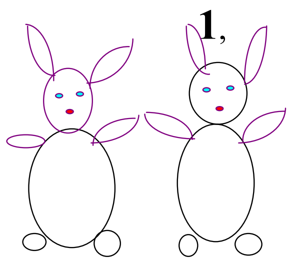
Г.Ю.Ризниченко

Модели популяционной динамики

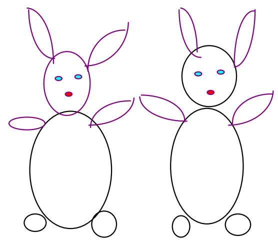
Модели одной популяции

- *Непрерывные модели: экспоненциальный рост, логистический рост, модели с наименьшей критической численностью.*
- *Модели с неперекрывающимися поколениями. Дискретное логистическое уравнение.*
- *Диаграмма и лестница Ламерея.*
- *Типы решений при разных значениях параметра: монотонные и затухающие решения, циклы, квазистохастическое поведение, вспышки численности.*
- *Матричные модели популяций. Влияние запаздывания.*

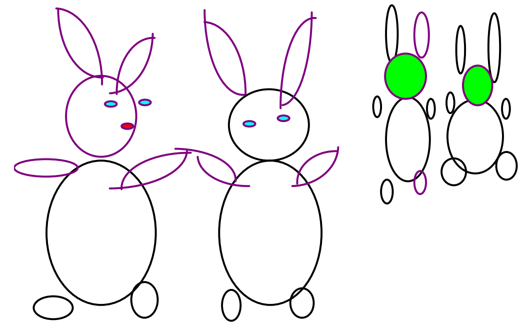
Популяционная динамика ряд Фибоначчи



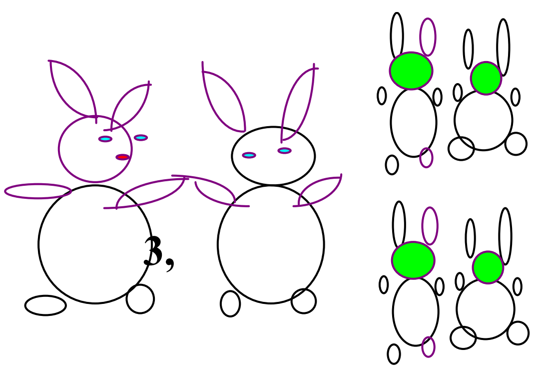
1



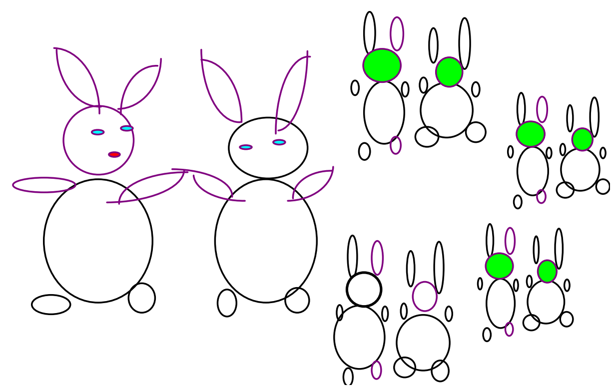
1



2



3



5

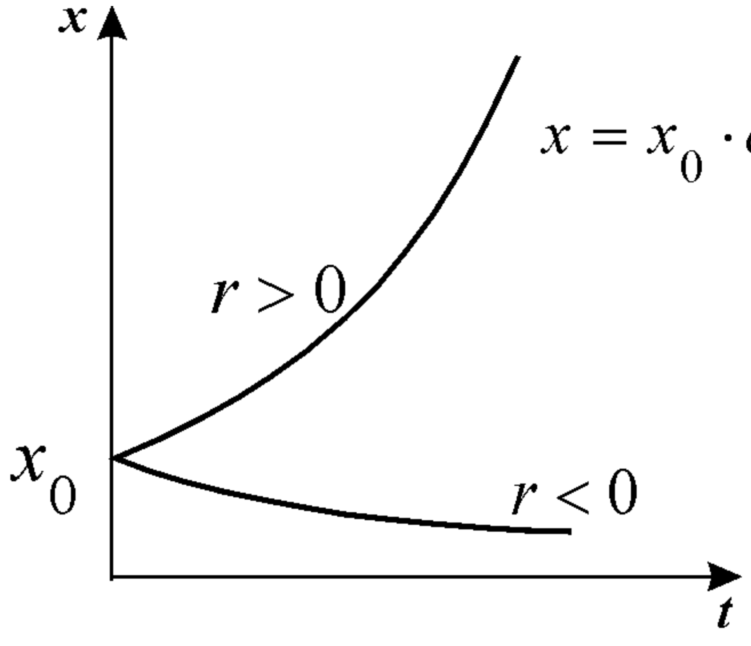
Леонардо из Пизы («Трактат о счете», 13 век)

Непрерывные модели роста популяций

Модель экспоненциального роста Мальтуса («О росте народонаселения» 1798)

$$N_{t+1} = qN_t \qquad N_{t+1} = q^n N_0$$

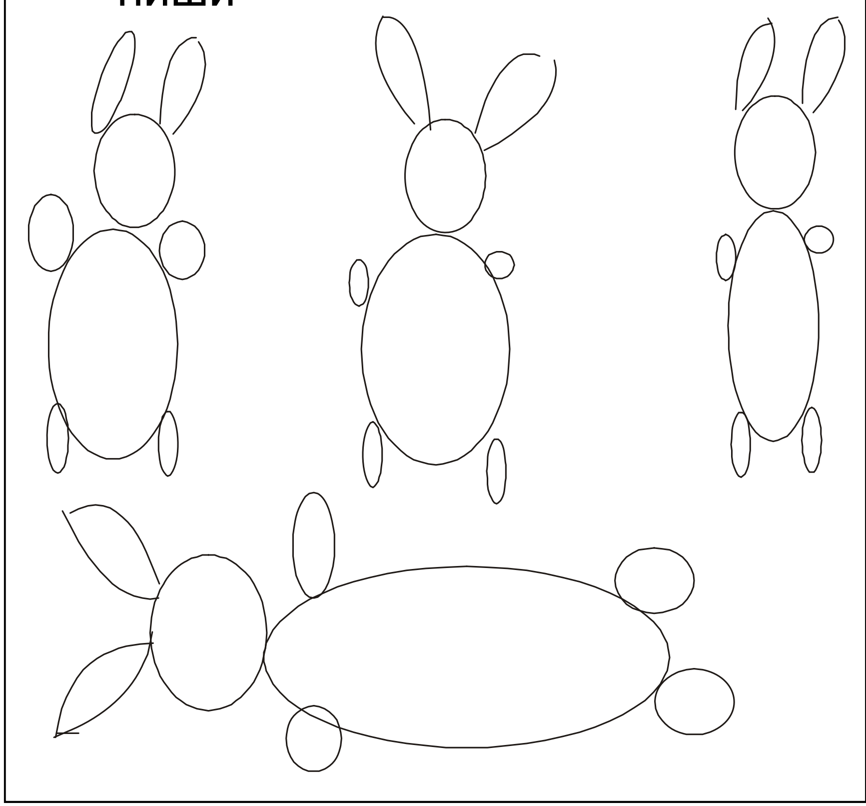
$$\frac{dx}{dt} = rx\,.$$



Уравнение логистического роста (Ферхюльст, 1845)

$$\frac{dx}{dt} = rx(1 - \frac{x}{K})$$

r – константа скорости роста
K – емкость экологической ниши



K – системный фактор

Уравнение Ферхюльста

$$\frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right)$$

$$x(t) = \frac{x_0 K e^{rt}}{K - x_0 + x_0 e^{rt}}$$

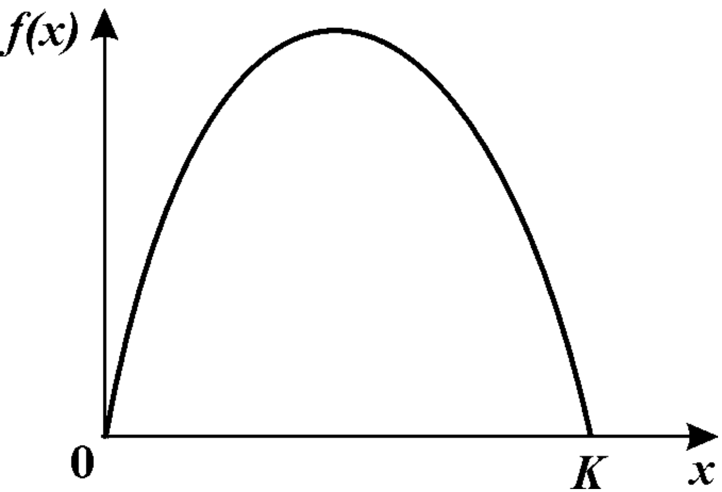
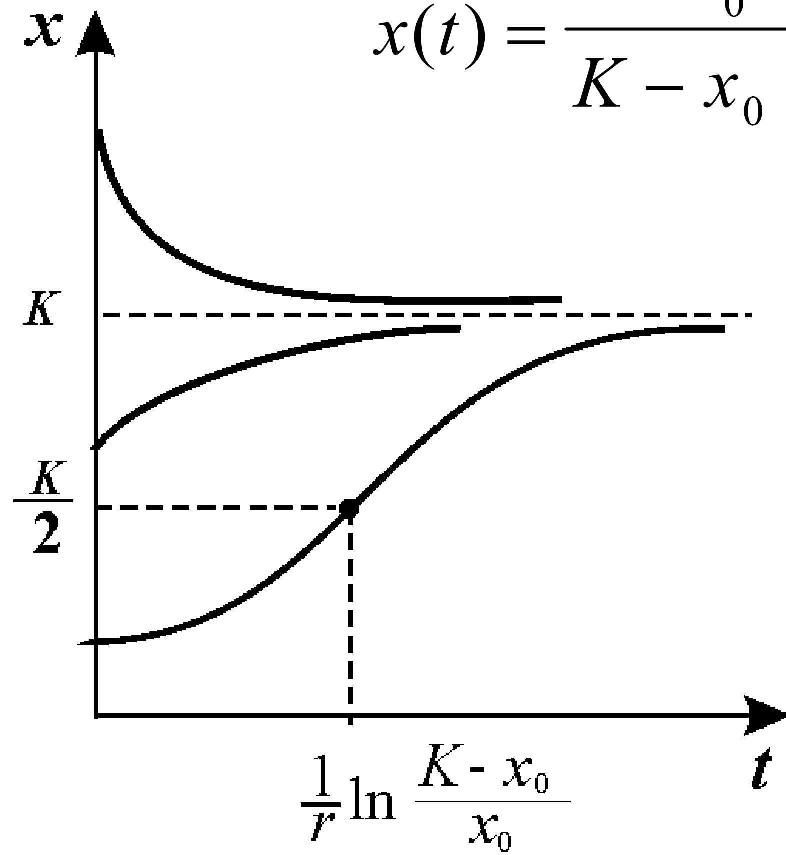


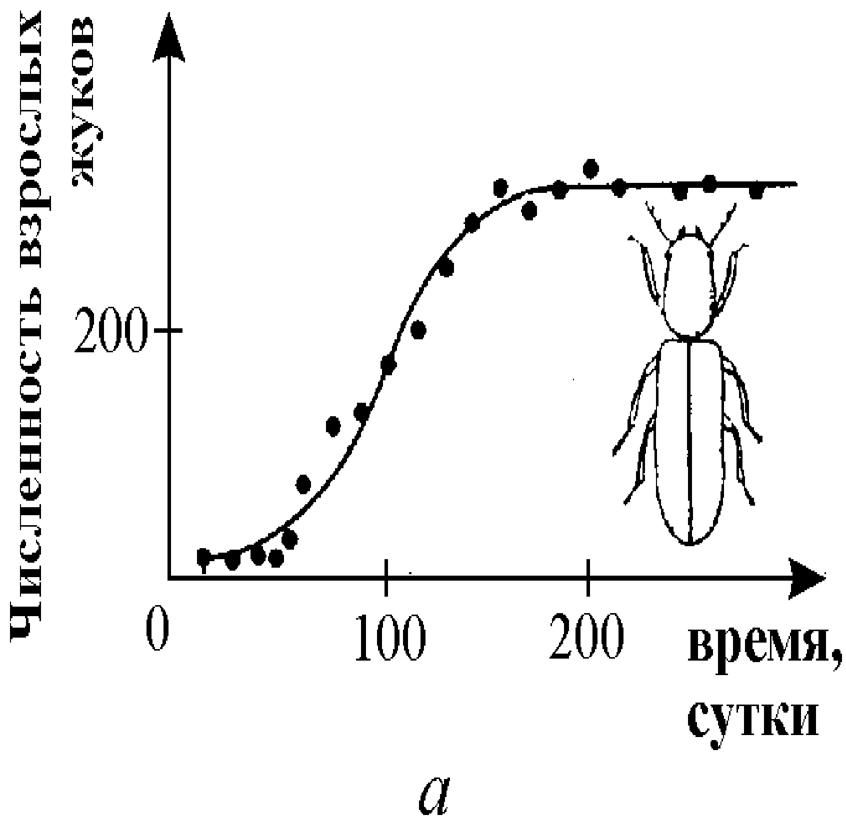
График функции $f(x)$

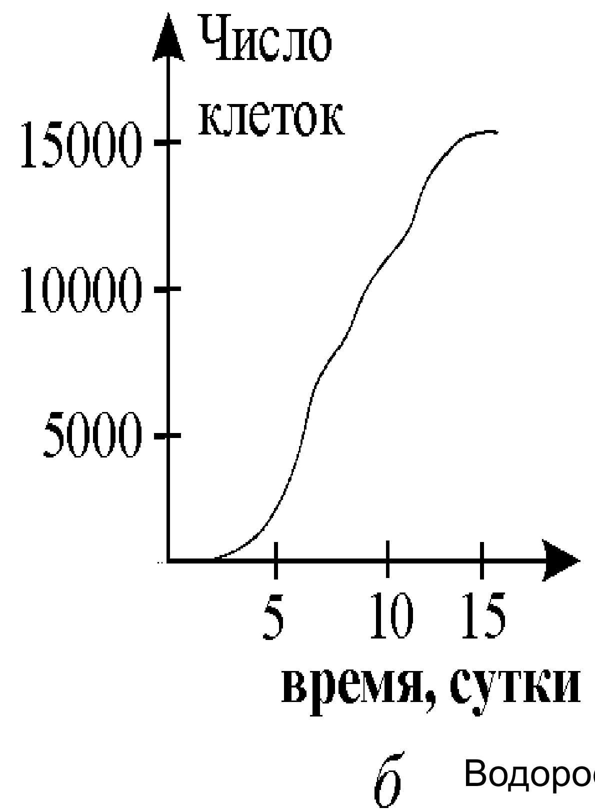


Поведение x во времени

Ограниченный рост (уравнения Ферхюльста)

$$\frac{dx}{dt} = rx(1 - \frac{x}{K})$$





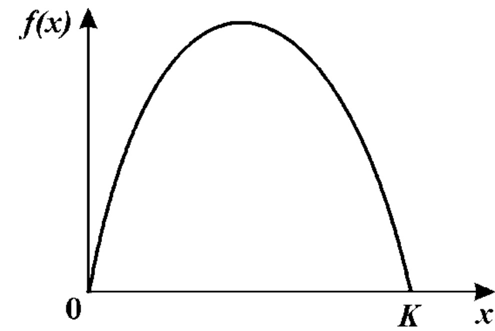
Жук *Rhizoretha dominica* в 10-граммовой порции пшеничных зерен, пополняемых каждую неделю (Crombie, 1945).

Водоросль *Chlorella* в культуре

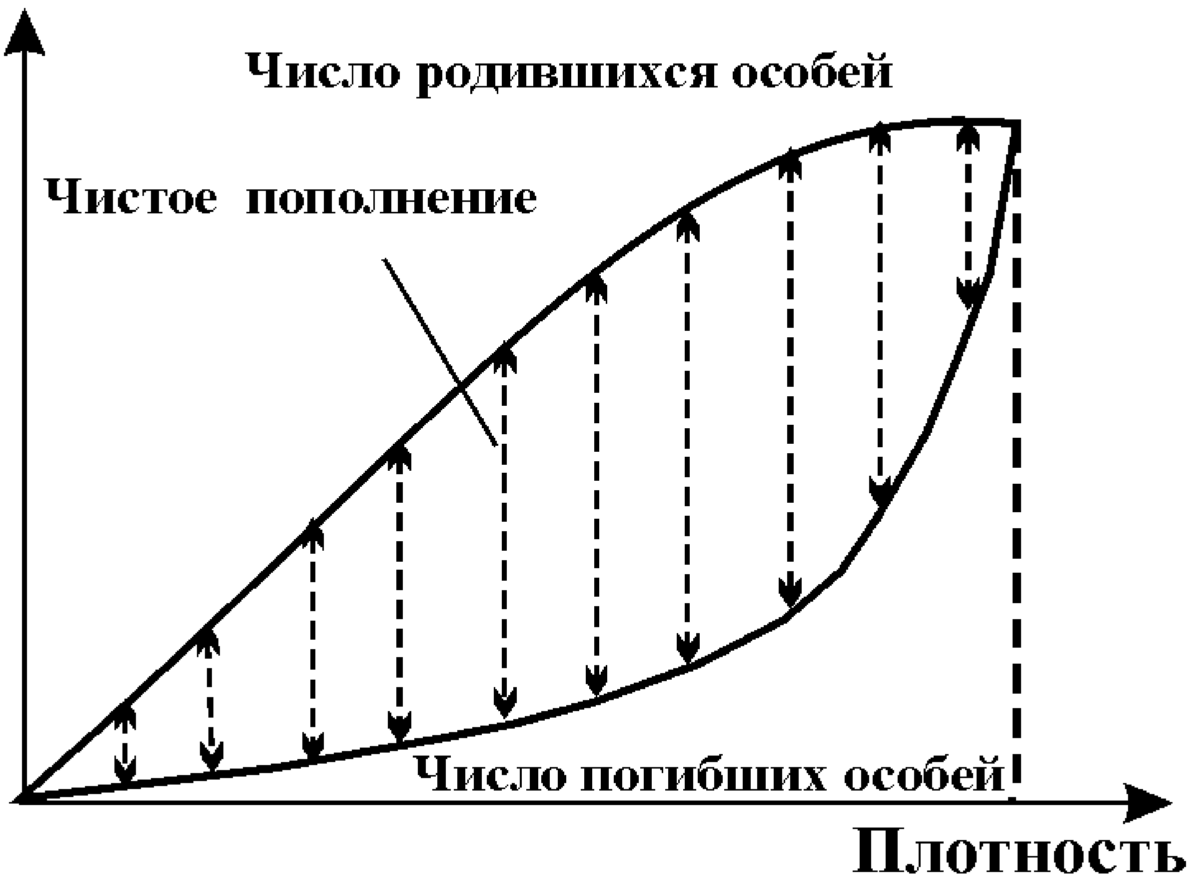
(Pearsall, Bengry, 1940)

$$\frac{dx}{dt} = rx(1 - \frac{x}{K})$$

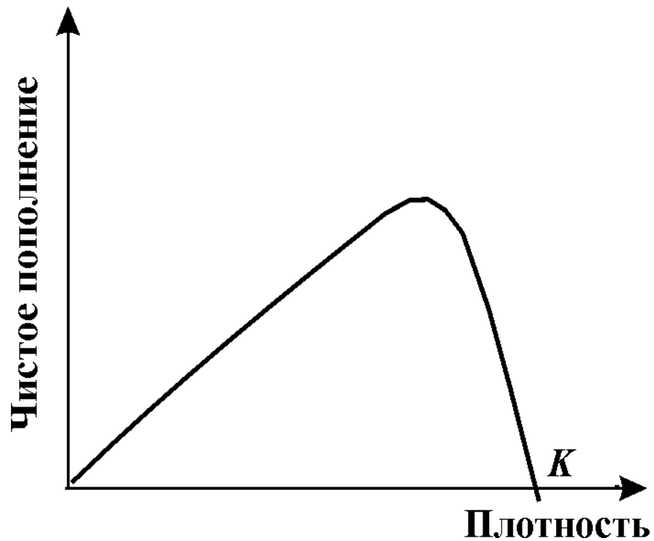
Кривые пополнения



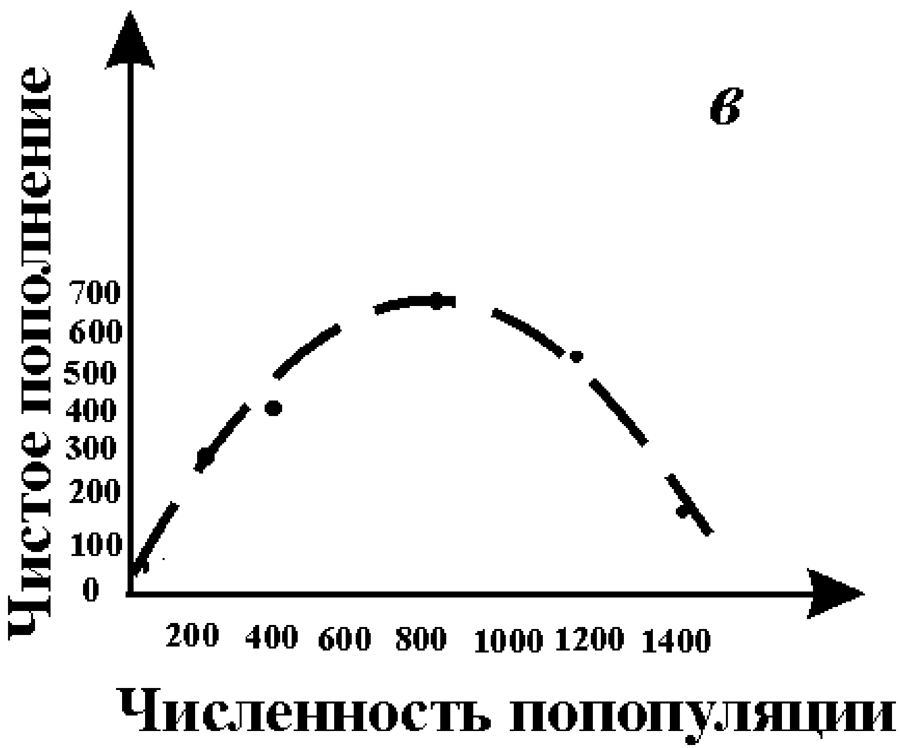
а



б

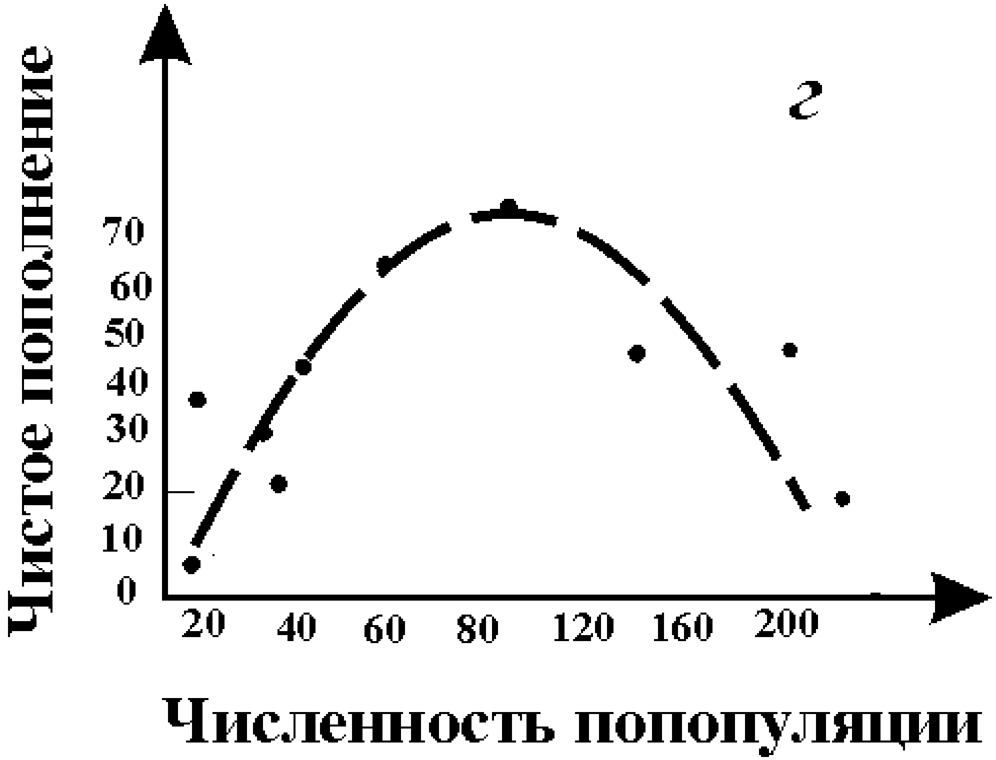


Примеры кривых пополнения (1)



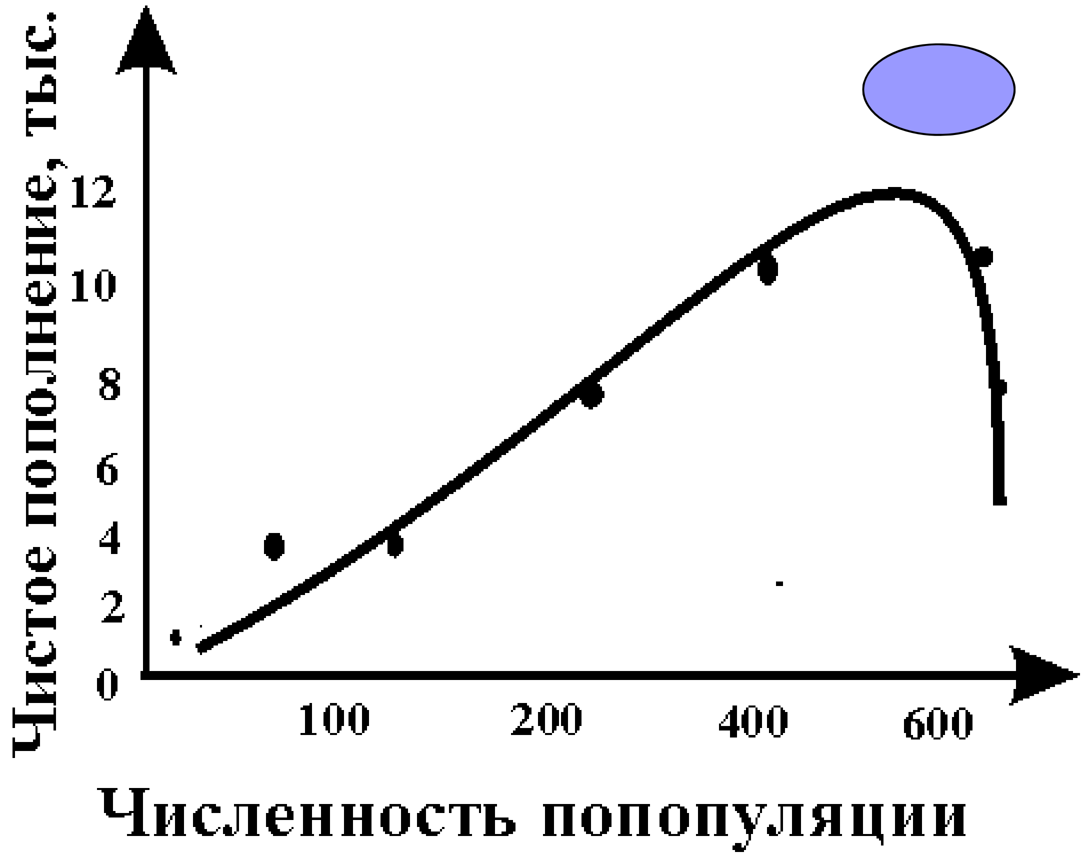
численность фазана обыкновенного на о. Протекшн - Айленд после его интродукции в 1937 г. (Einarsen, 1945);

Примеры кривых пополнения (2)



экспериментальная популяция плодовой мушки *Drosophyla melanogaster* (*Pearl, 1927*)

Примеры кривых пополнения (3)

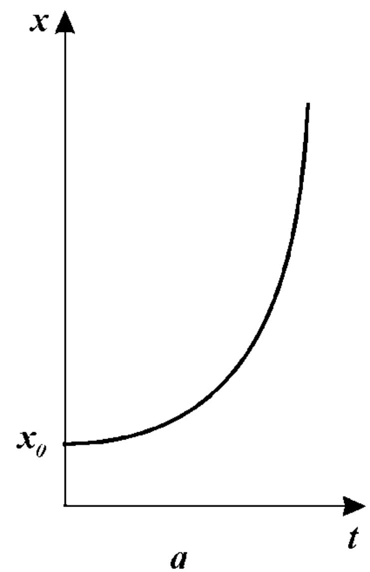


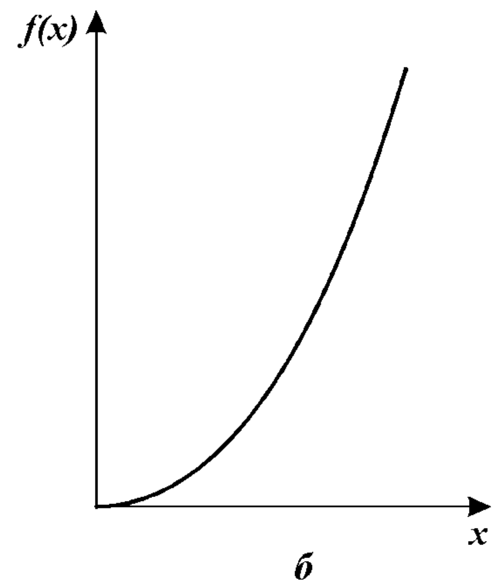
оценка численности *арктического финвала* (*Allen, 1972*)

Учет двуполого размножения

$$\frac{dx}{dt} = rx^2$$

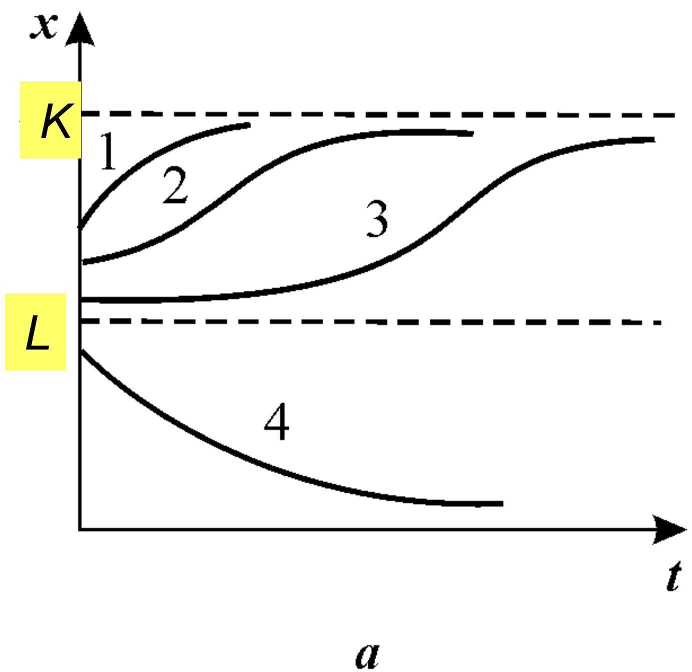
$$\frac{dx}{dt} = a\frac{\beta x^2}{\beta + \tau x}$$

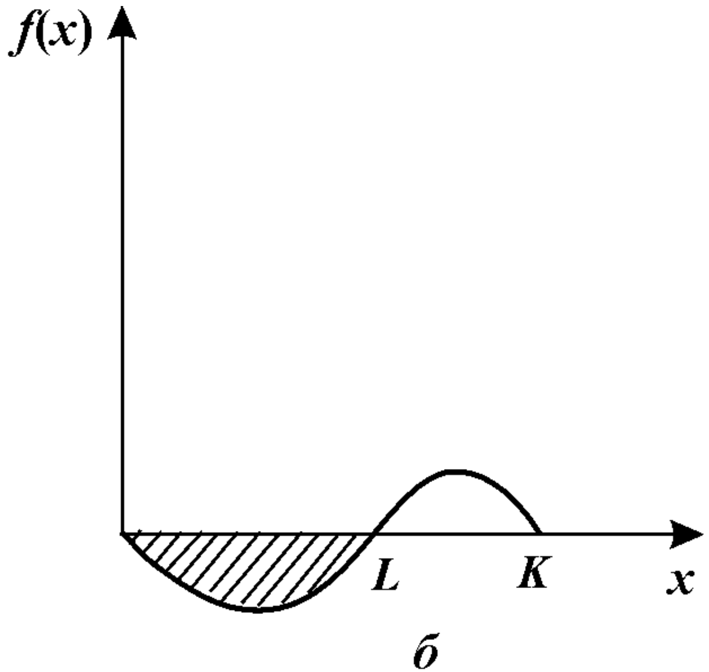




При низких плотностях скорость размножения пропорциональна вероятности встреч.
При высоких – числу самок в популяции.

Наименьшая критическая численность

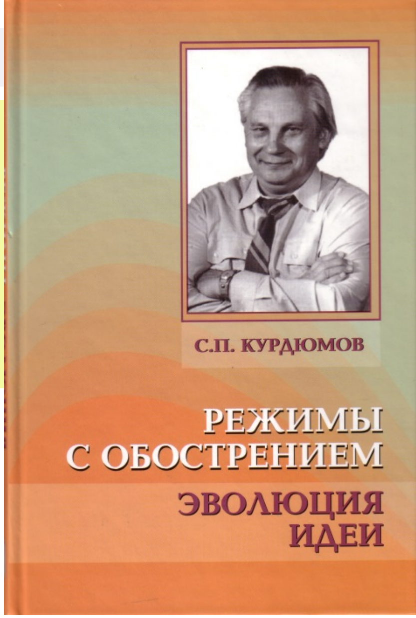


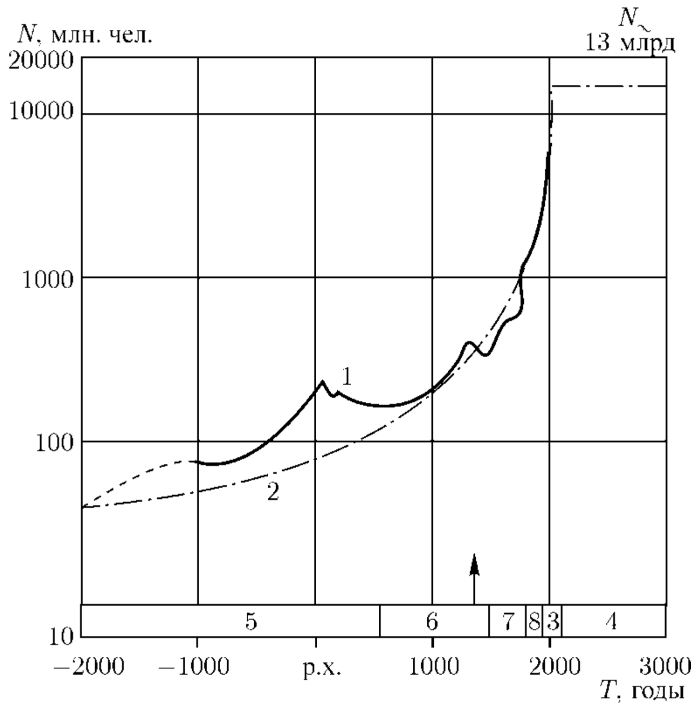


$$\frac{dx}{dt} = a\frac{\beta x^2}{\beta + \tau x} - dx - \delta x^2$$

Динамика численности человечества

$$\tau \frac{dN}{dT} = \frac{N^2}{K^2} \qquad N(T) = \frac{K^2 \tau}{T_{crit} - T}$$





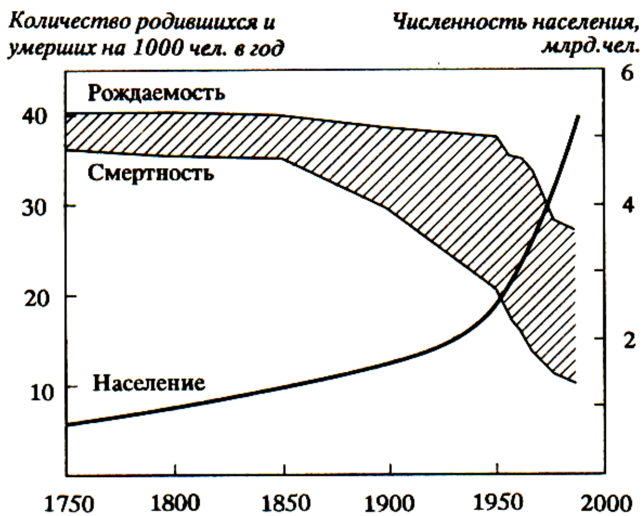
Сергей Петрович Капица (1928-2012)

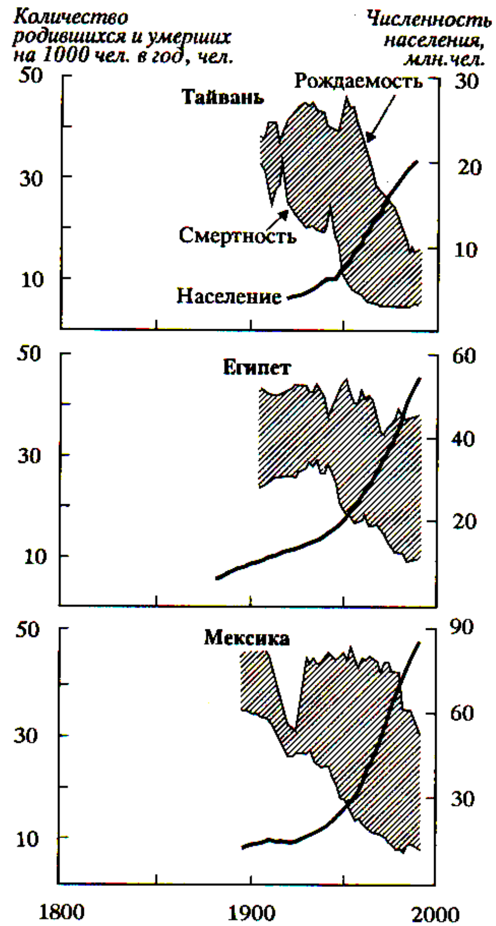
Общая теория роста человечества 1999

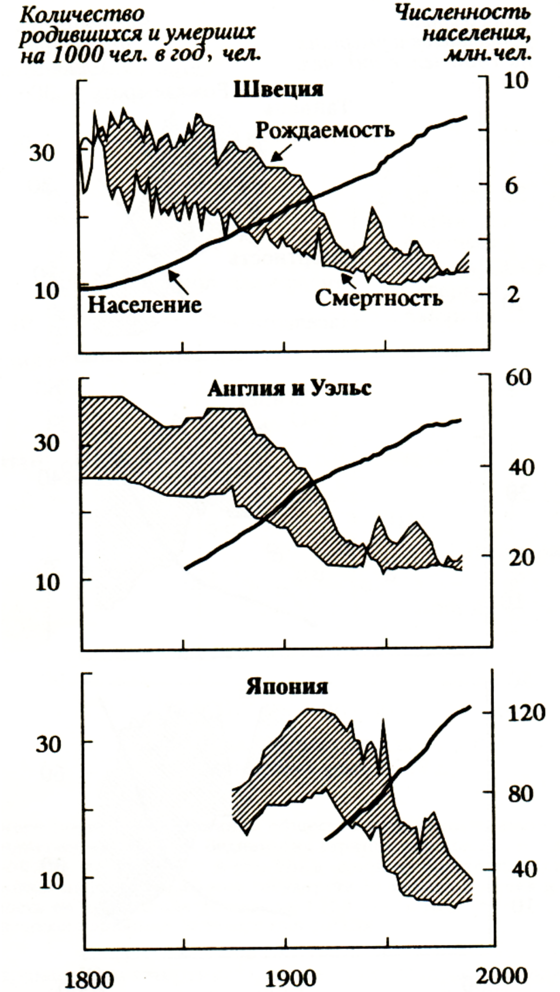
Г.Ю.Ризниченко
А.Б.Рубин
Биофизическая динамика продукционных процессов 2004. Глава 8

Сергей Павлович Курдюмов 1929-2004

Прирост численности населения (пополнение)







Модель глобального роста

- Невозможно решить проблему на том уровне, на котором она возникла. Нужно стать выше этой проблемы, поднявшись на следующий уровень
  - Альберт Эйнштейн

- Forrester J.W. World dynamics. 1971
- Форрестер Дж. Мировая динамика. М., Наука,1978

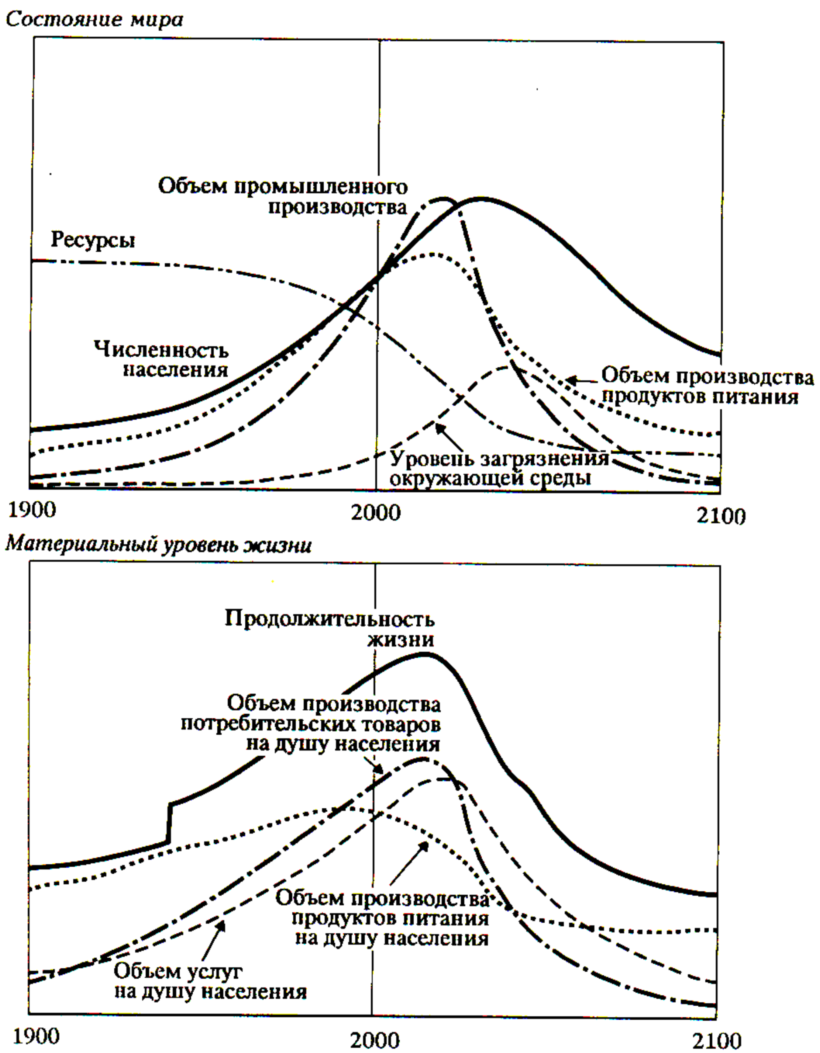
- Meadows D.U.et al. The dynamics of the growth in a finite world. 1974
- Meadows D. et al., The limits to growth. 1972
- Медоуз Д.бином и др., Пределы роста, изд. МГУ, 1991

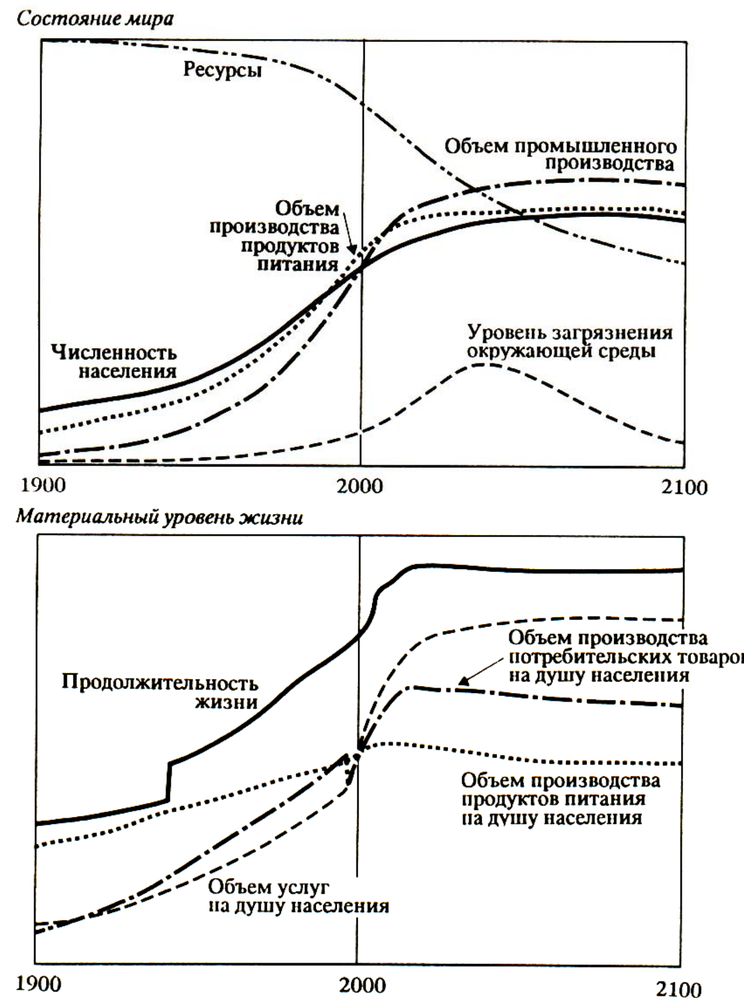
  За пределами роста 1994

  Пределы роста 30 лет спустя. 2008

  АЗБУКА СИСТЕМНОГО МЫШЛЕНИЯ. Бином 2011

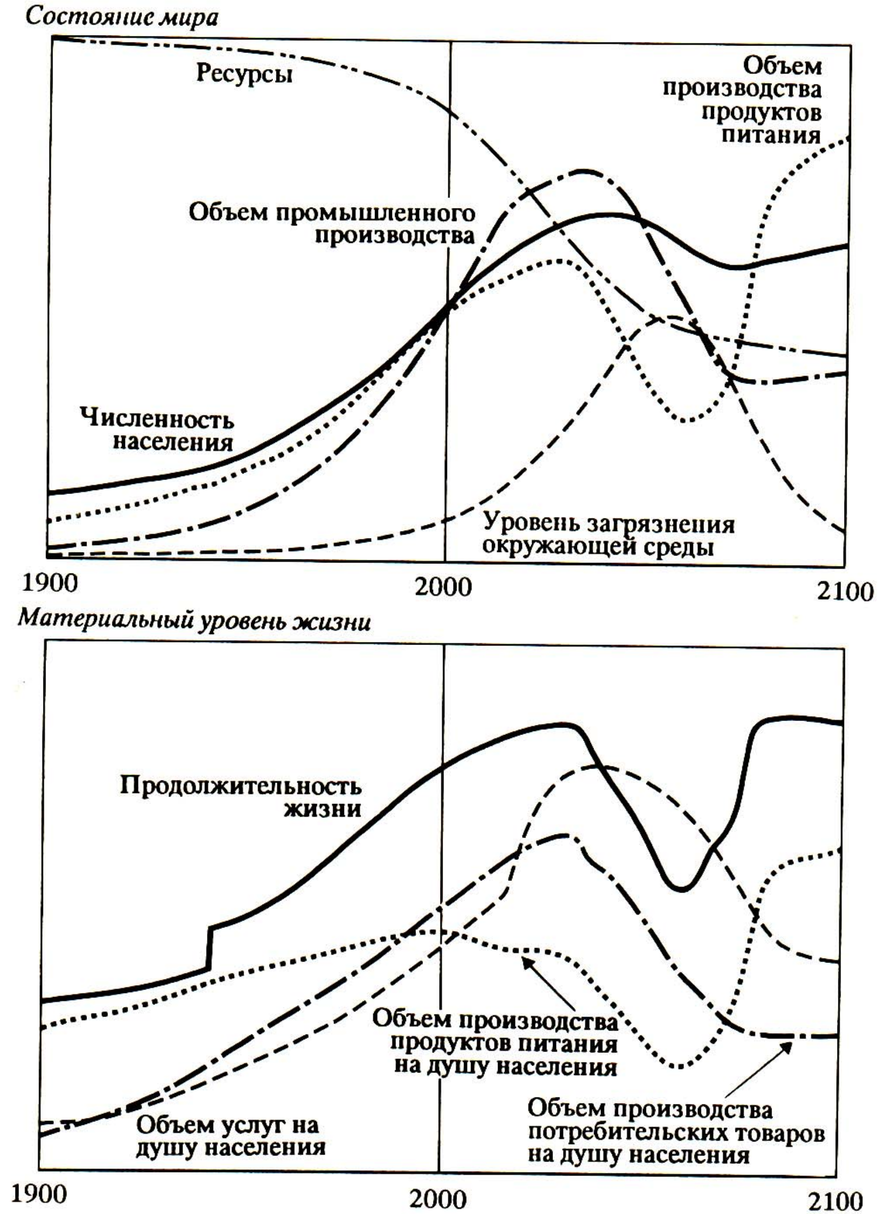
Принятие мер в 1995 году





Принятие мер в 2015 году

Запаздывание в принятии мер предотвращения кризиса

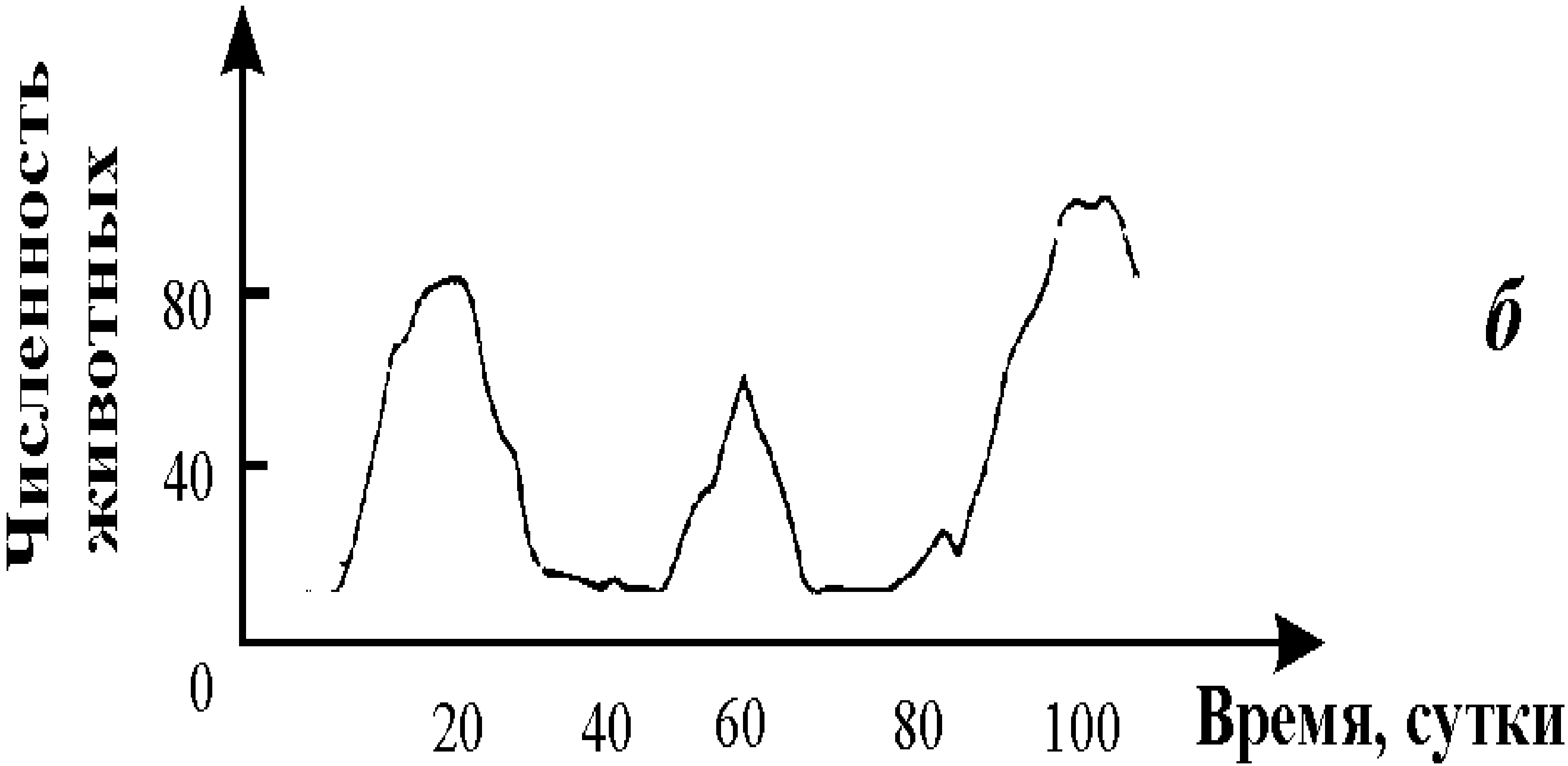


Динамика численности популяции

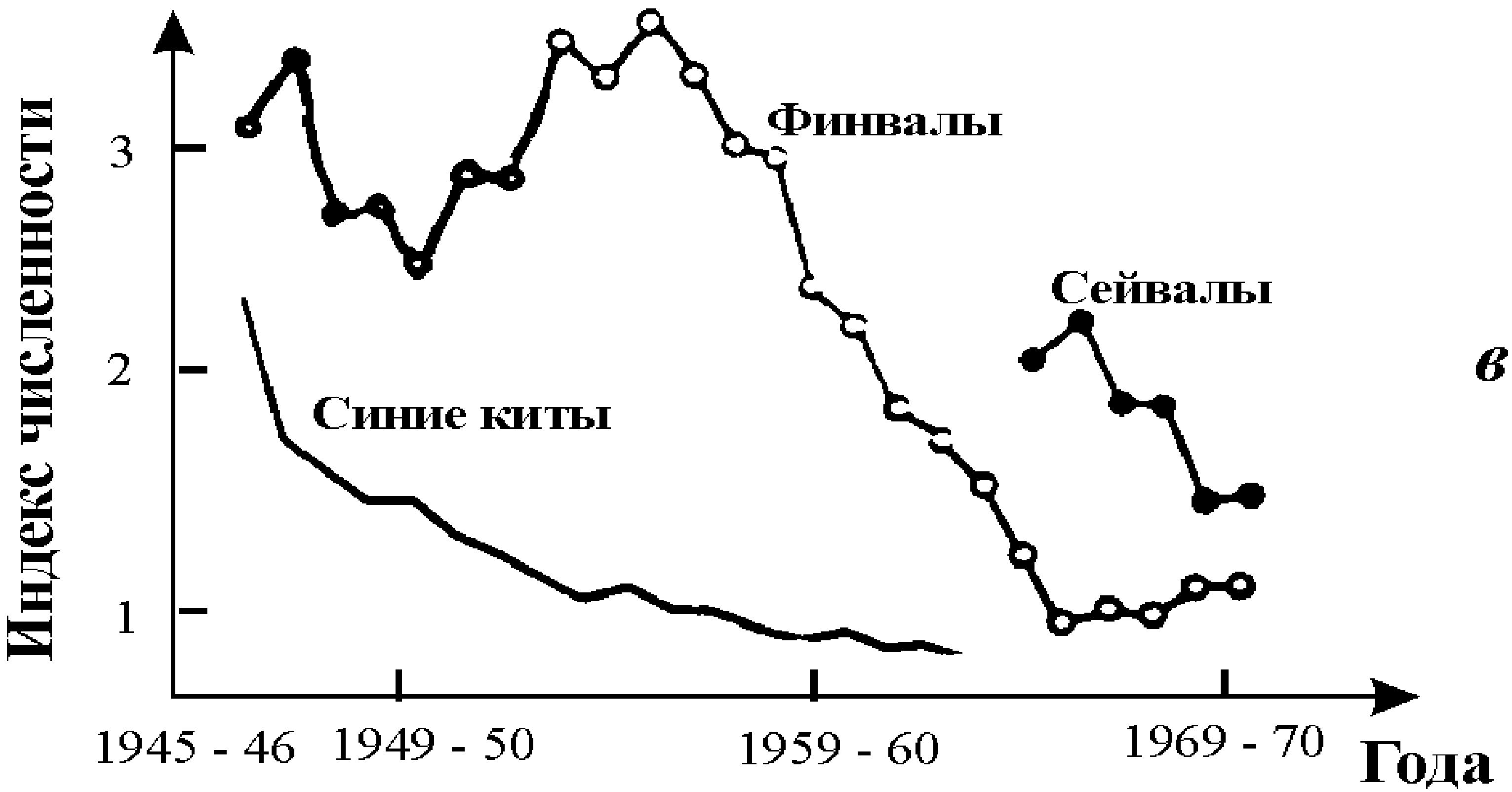
- Численность может меняться во времени различным образом: расти, совершать колебания, падать.

Численность поголовья овец на острове Тасмания (*Davidson*,1938)

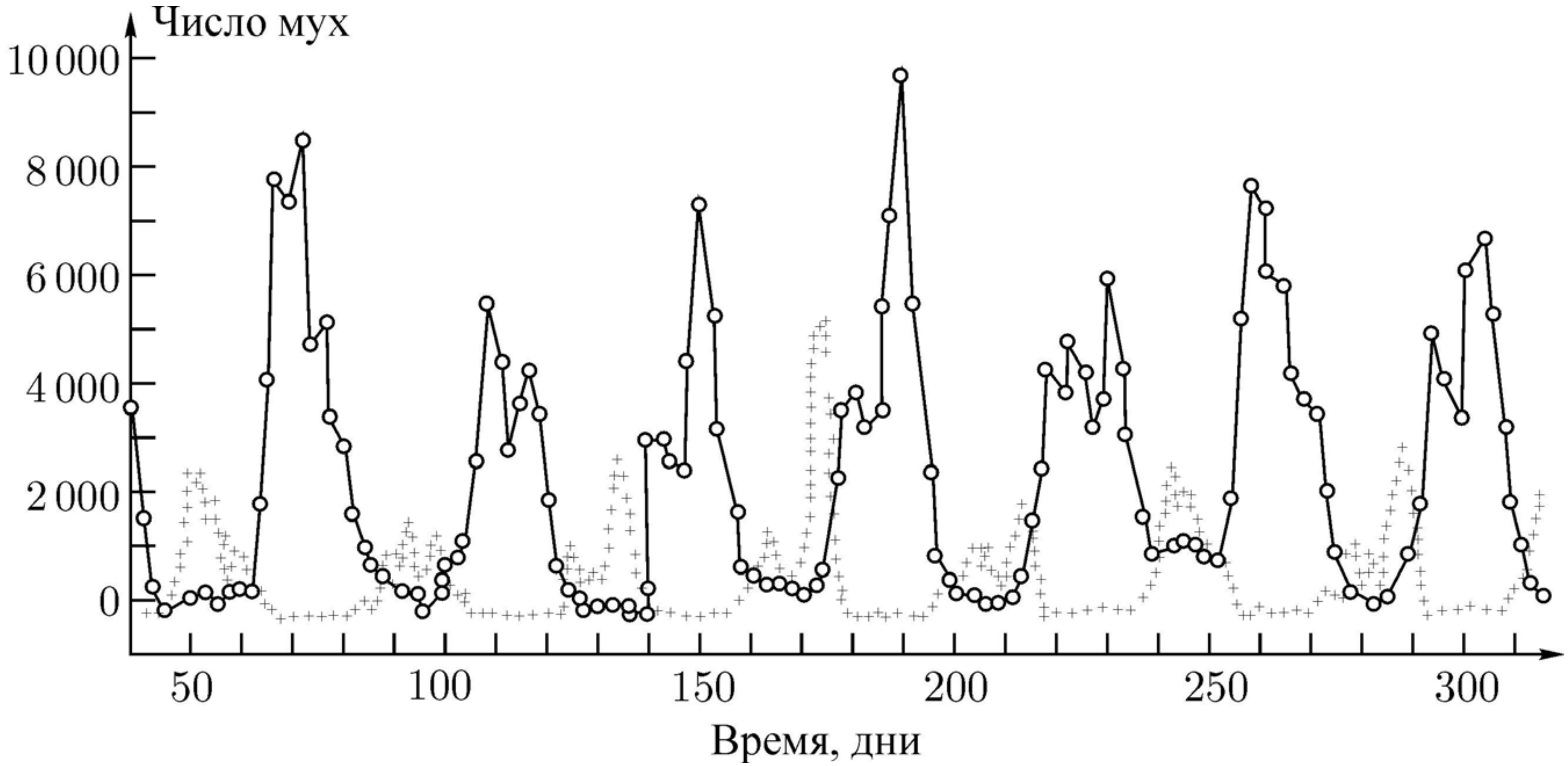
Изменение численности *Daphnia magna* (*Frall*, 1943)



Динамика численности трех видов китов в Антарктике (приведена по изменению «индекса численности» убитых китов
на 1 тыс. судо - тонно - суток, *Gulland*, 1971)



Численность мух Lucilia в популяционном ящике (Nicholson, 1954) 1 – взрослые особи. Крестики – число яиц, отложенных за один день



Причины, обуславливающие тип динамики популяции:

- Собственные свойства популяции
- Изменение параметров окружающей среды
- Взаимодействие видов