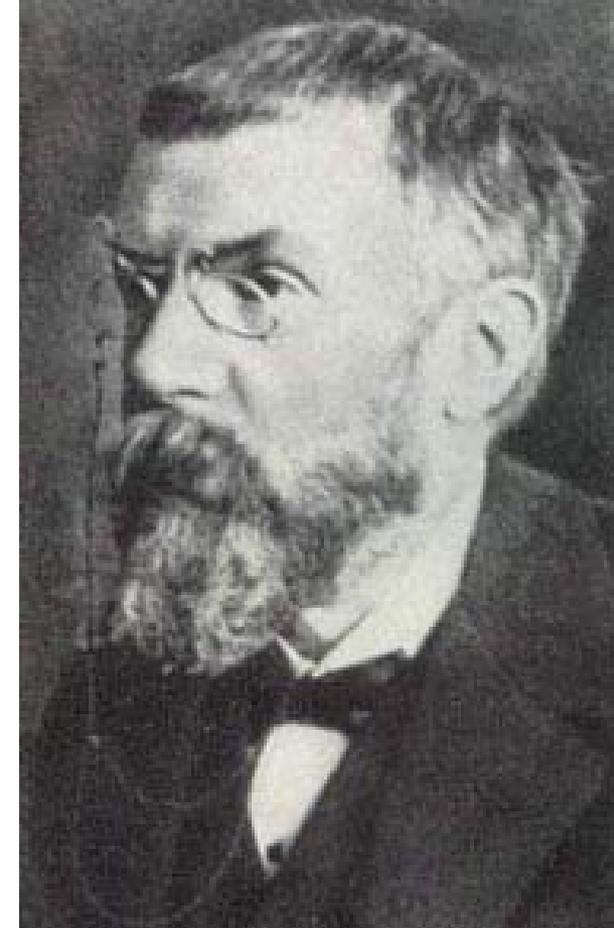


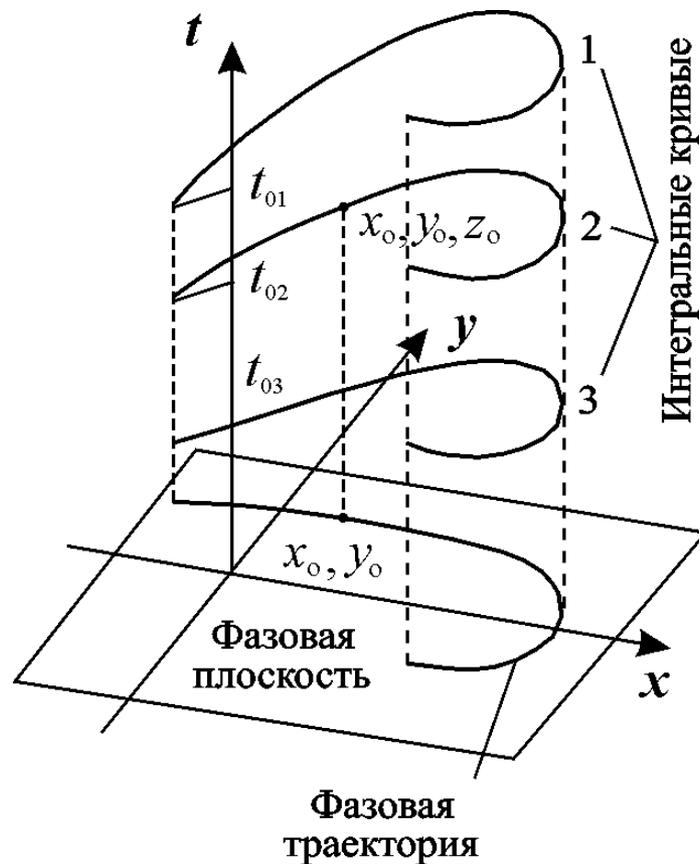
Фазовая плоскость
Качественное исследование

Анализ устойчивости
стационарного состояния
системы двух автономных
дифференциальных
уравнений

Траектории системы в пространстве (x, y, t)



Жюль Анри Пуанкаре
(Jules Henri Poincaré)
[1854-1912](#)



Типы устойчивости стационарного состояния

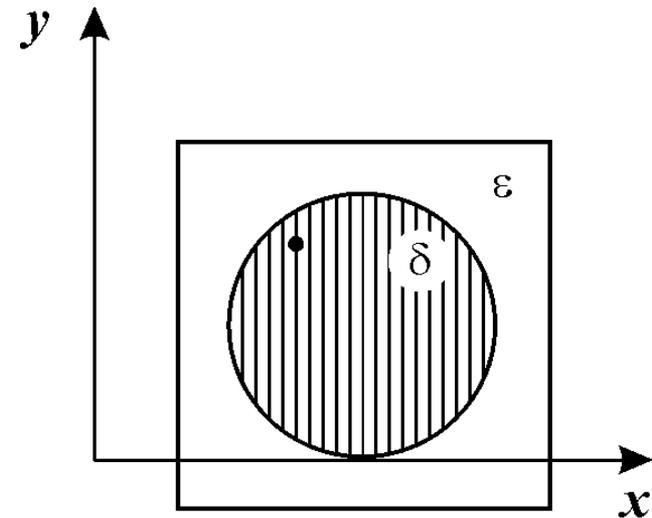


$$\frac{dx}{dt} = P(x, y),$$
$$\frac{dy}{dt} = Q(x, y).$$

Ляпунов Александр Михайлович ([1857](#) – 1918) – выдающийся русский [математик](#), создал [теорию устойчивости](#) состояний равновесия и движения механических систем с конечным числом параметров. Работал также в области [дифференциальных уравнений](#), [гидродинамики](#), [теории вероятностей](#)

Определение устойчивости

- *Состояние равновесия устойчиво, если для любой заданной области отклонений от состояния равновесия (ε) можно указать область $\delta(\varepsilon)$, окружающую состояние равновесия и обладающую тем свойством, что ни одна траектория, которая начинается внутри области δ , никогда не достигнет границы ε .*



Устойчивость
стационарного
состояния

$$\frac{dx}{dt} = ax + by, \quad \frac{dy}{dt} = cx + dy$$

Решение ищем в виде: $x = Ae^{\lambda t}, \quad y = Be^{\lambda t}$

$$\lambda A = aA + bB,$$

$$\lambda B = cA + dB.$$

Условие
нетривиального
решения

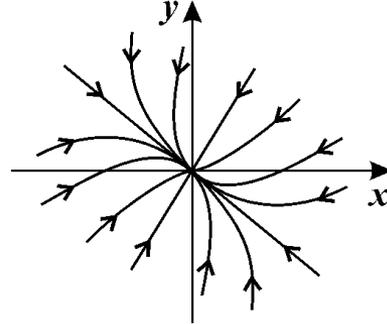
$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0$$

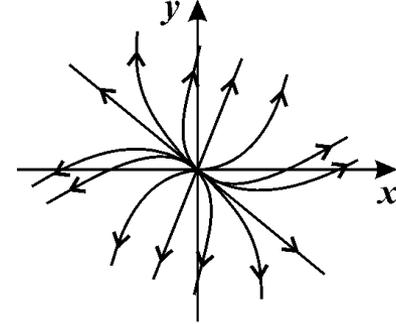
Характеристическое уравнение

$$\lambda_{1,2} = \frac{a + d}{2} \pm \sqrt{\frac{(a + d)^2 - 4(ad - bc)}{4}}$$

$$\frac{dx}{dt} = ax + by, \quad \frac{dy}{dt} = cx + dy$$



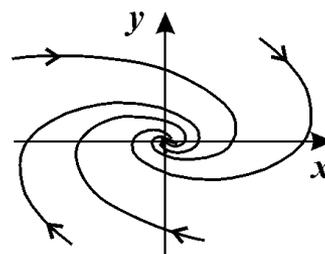
Устойчивый узел.
(λ_1, λ_2 действительны и отрицательны)



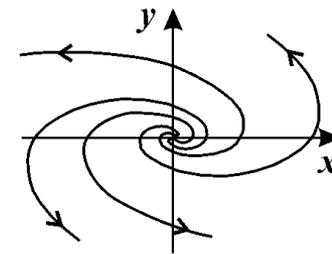
Неустойчивый узел.
(λ_1, λ_2 действительны и положительные)

Поведение фазовых траекторий системы двух линейных ОДУ в окрестности стационарного состояния при разных значениях характеристических чисел

$$\lambda_{1,2}$$

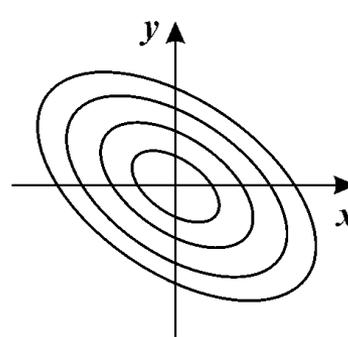


Устойчивый фокус
(λ_1, λ_2 - комплексны, $\text{Re } \lambda_{1,2} < 0$)

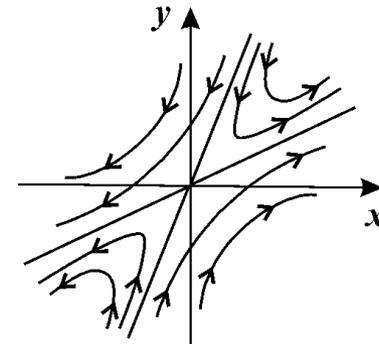


Неустойчивый фокус
(λ_1, λ_2 - комплексны, $\text{Re } \lambda_{1,2} > 0$)

$$\lambda_{1,2} = \frac{a+d}{2} \pm \sqrt{\frac{(a+d)^2 - 4(ad-bc)}{4}}$$



Центр.
(λ_1, λ_2 - чисто мнимые)



Седло.
(λ_1, λ_2 - действительны и разных знаков)

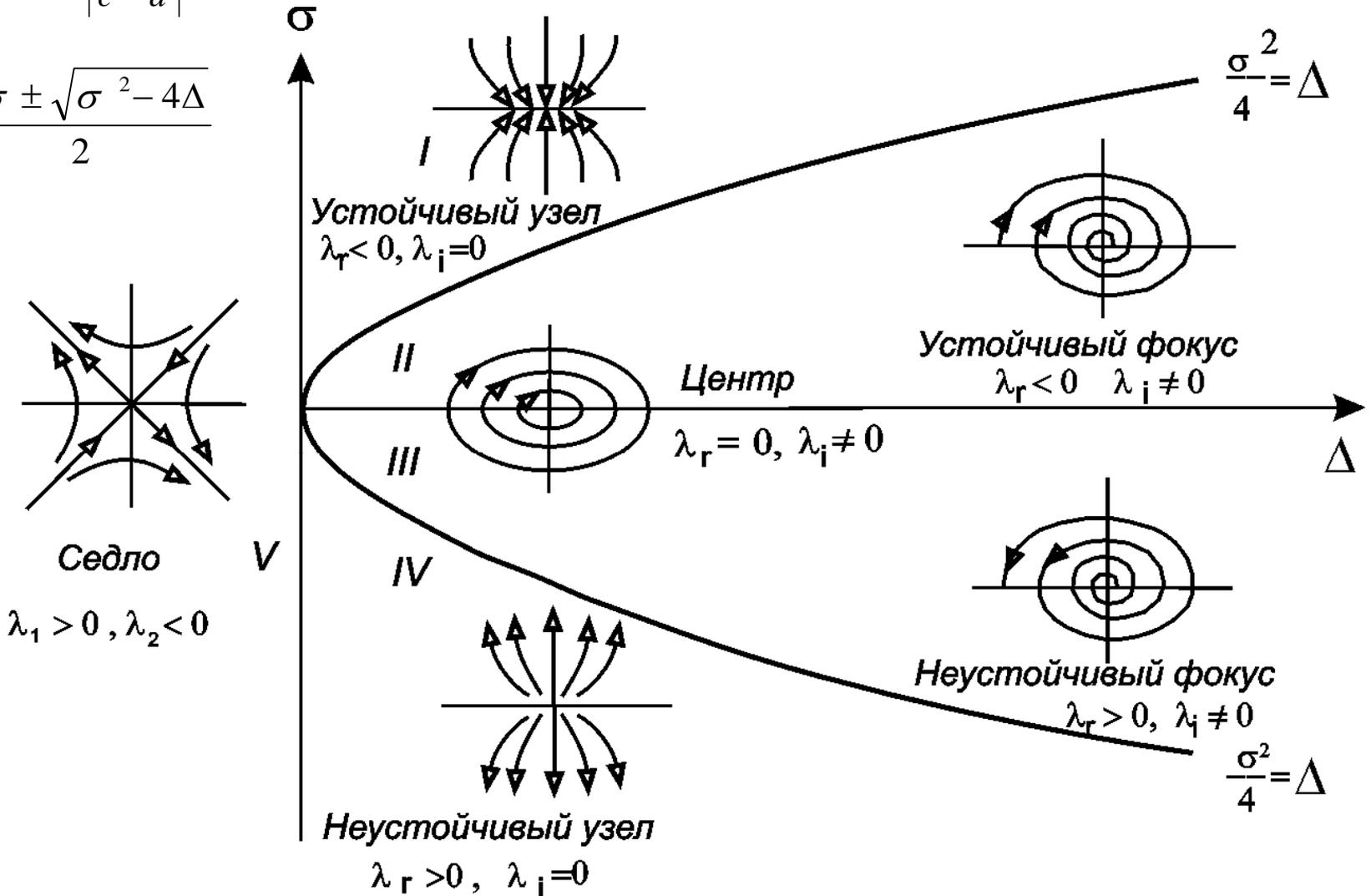
$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

Формула Эйлера

Бифуркационная диаграмма

$$\sigma = -(a+d); \Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 - 4\Delta}}{2}$$



Линеаризация системы общего вида

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y),$$
$$\frac{dy}{dt} = Q(x, y).$$

$$x = \bar{x} + \xi,$$

$$y = \bar{y} + \eta.$$

Линеаризованная система

$$\frac{d\xi}{dt} = a\xi + b\eta,$$

$$\frac{d\eta}{dt} = c\xi + d\eta.$$

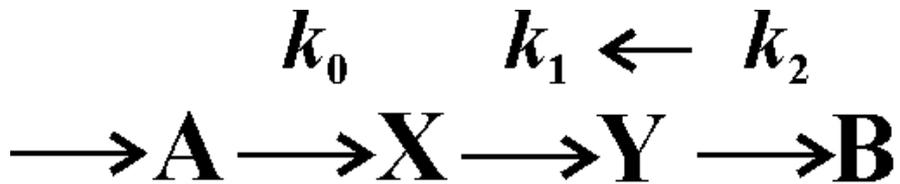
$$a = P'_x(\bar{x}, \bar{y}), b = P'_y(\bar{x}, \bar{y}),$$

$$c = Q'_x(\bar{x}, \bar{y}), d = Q'_y(\bar{x}, \bar{y}).$$

Если *оба корня* имеют **отрицательную действительную** часть и, следовательно, все решения уравнений первого приближения затухают, то **состояние равновесия устойчиво**;

- если *хотя бы один корень* имеет **положительную действительную** часть, то есть линеаризованная система имеет нарастающие решения, то **состояние равновесия неустойчиво**.
- Если *действительные части* **обоих корней** характеристического уравнения *равны нулю* или если *один корень равен нулю*, а *другой отрицателен*, то уравнения (5.8) *не дают ответа* на вопрос об устойчивости состояния равновесия, и необходимо рассматривать члены более *высокого порядка малости* в разложении в ряд Тейлора *правых частей* уравнений (5.6).

Кинетические уравнения Лотки (A.J. Lotka. Elements of Physical Biology, 1925)



$$\frac{dx}{dt} = k_0 - k_1 xy,$$
$$\frac{dy}{dt} = k_1 xy - k_2 y,$$
$$\frac{dB}{dt} = k_2 y.$$



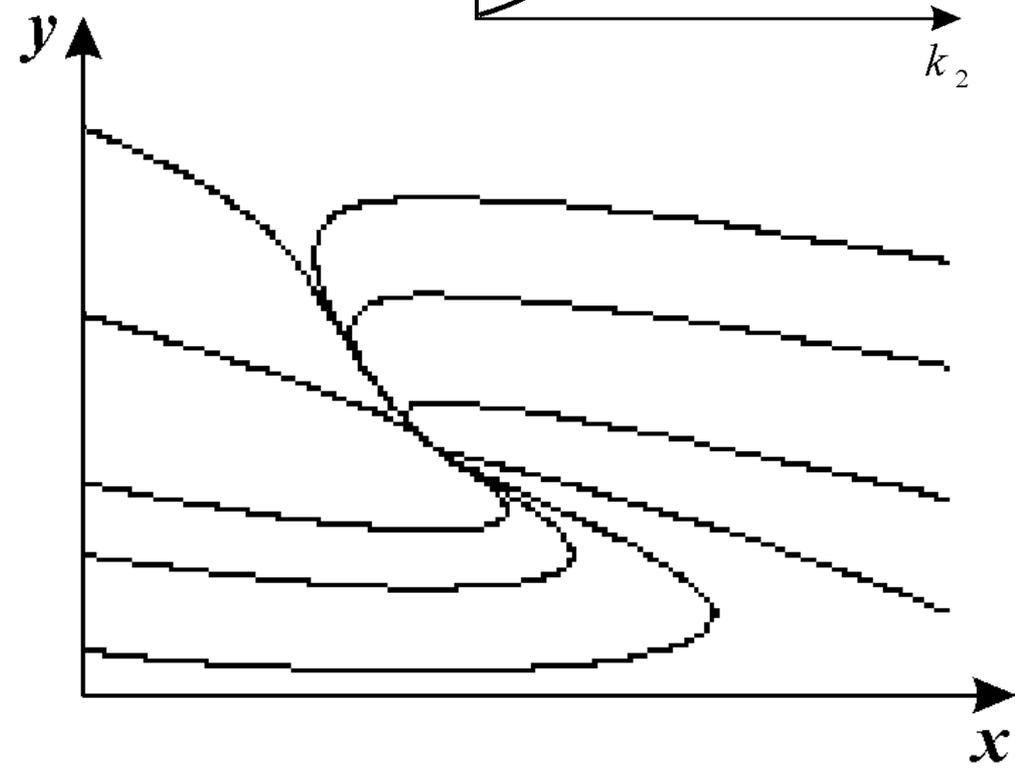
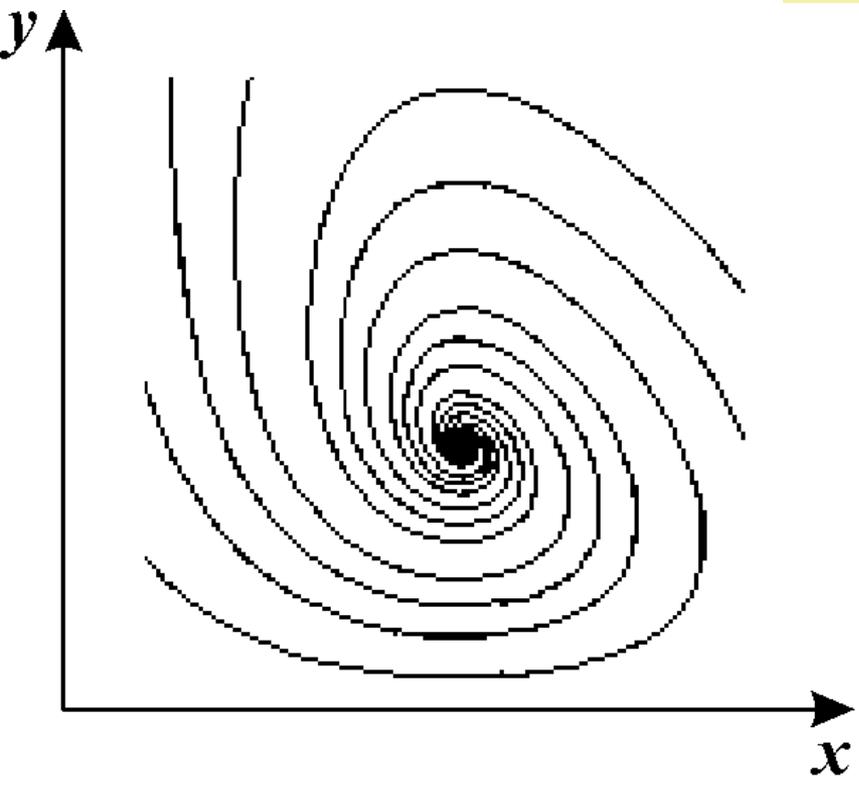
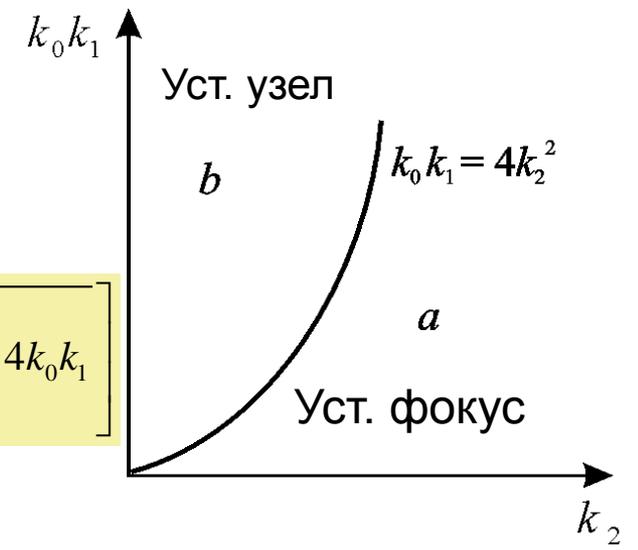
Лотка Альфред Джеймс ([англ.](#) *Alfred James Lotka*), [1880](#) – 1949 – [американский математик](#), физик, статистик, демограф. Разработал модели простейших физико-химических реакций. Изучал процесс смены поколений, анализировал процесс демографического развития семьи, заложил основы экономической демографии

Фазовый портрет системы Лотки
a – устойчивый фокус,
б – устойчивый узел.

$$\frac{dx}{dt} = k_0 - k_1 xy,$$

$$\frac{dy}{dt} = k_1 xy - k_2 y.$$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \left[\frac{k_1 k_0}{k_2} \pm \sqrt{\left(\frac{k_1 k_0}{k_2} \right)^2 - 4k_0 k_1} \right]$$



a
 $k_0 = 2, \quad k_1 = 2, \quad k_2 = 2.$

б
 $k_0 = 2, \quad k_1 = 10, \quad k_2 = 4.$

Модель Вольтерра

$$\frac{dx}{dt} = x(\alpha - \beta y),$$

$$\frac{dy}{dt} = -y(\gamma - \delta x).$$

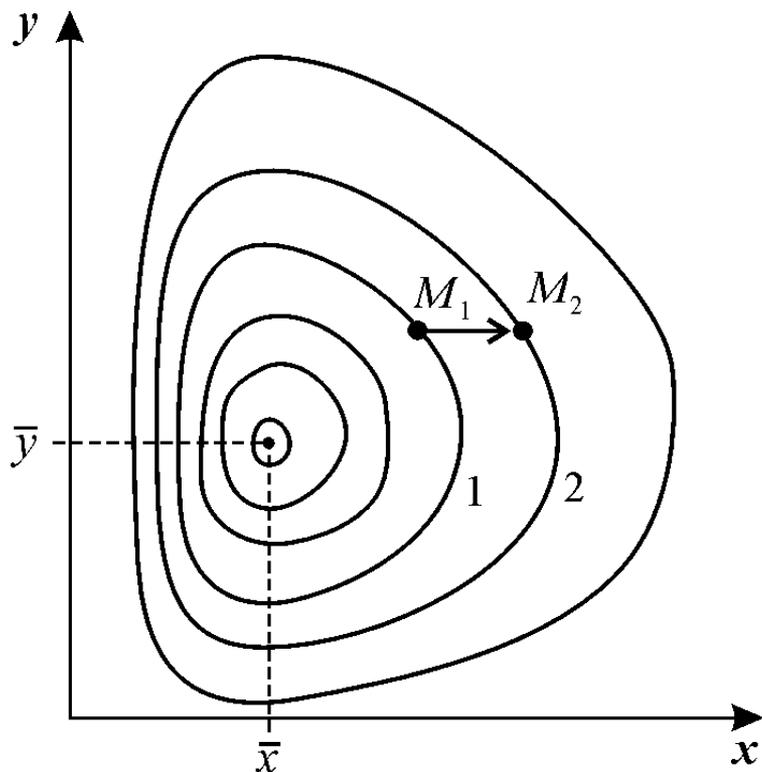
X – численность жертв

Y – численность хищников

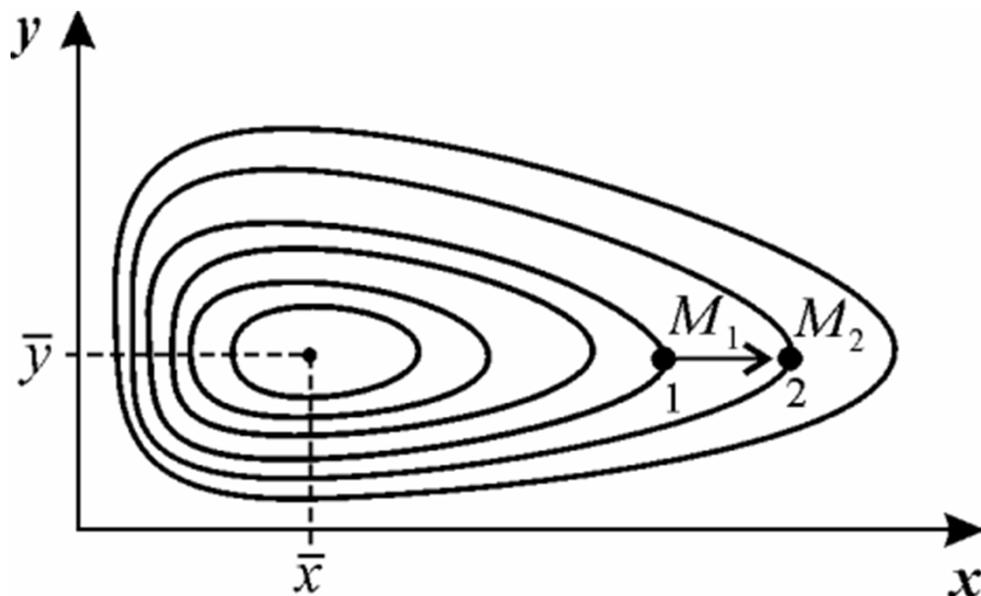


Вольтерра Вито ([1860](#) — [1940](#)) — выдающийся итальянский математик и физик. Работал в области дифференциальных уравнений с частными производными, теории упругости, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений, функционального анализа. Основатель математической теории популяций.

Фазовый портрет модели Вольтерра



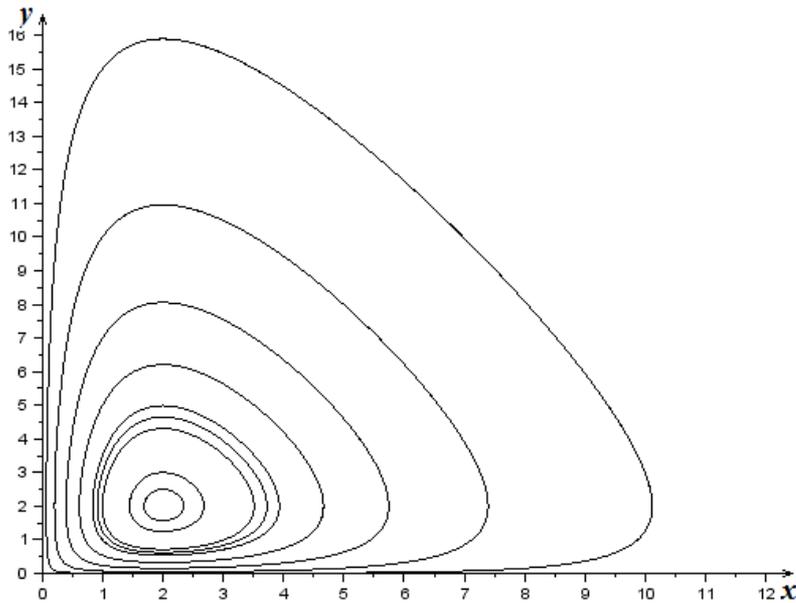
a



б

$$\varepsilon x = 4, \gamma_{xy} = 0,3, \varepsilon y = \gamma_{yx} = 0,4$$

$$\varepsilon x = 2, \gamma_{xy} = 0,3, \varepsilon y = \gamma_{yx} = 0,4$$



Volterra predator–prey model
describing continuous oscillations of
the population numbers.

(a) phase pattern;

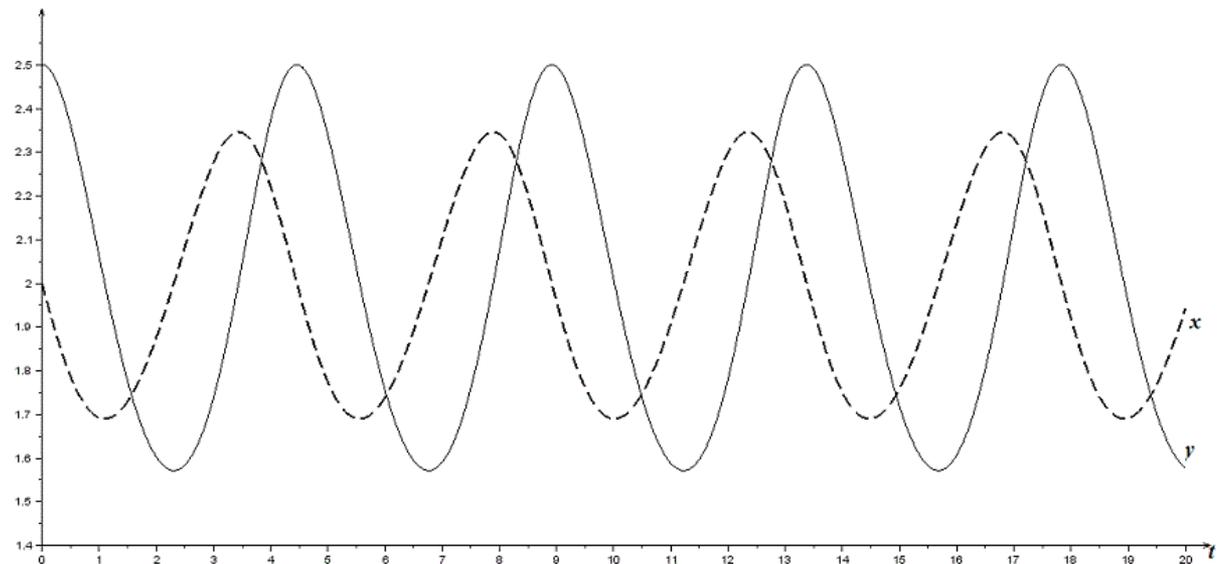
(b) dependence of the numbers
of predators and preys on time.

$$\frac{dx}{dt} = ax - bxy$$

$$\frac{dy}{dt} = cxy - dy$$

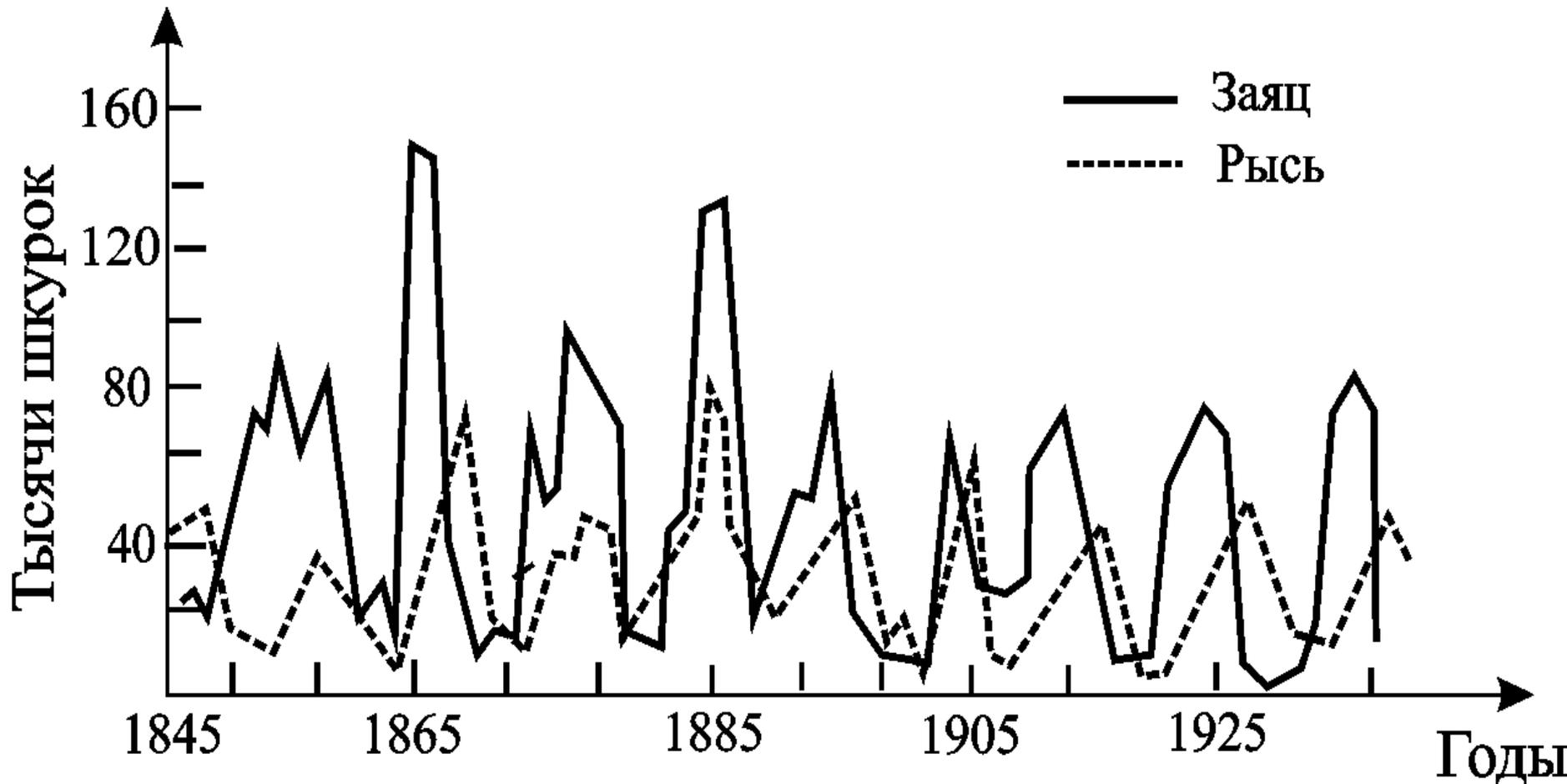
$$a = 1; b = 0.5;$$

$$c = 1; d = 2$$



Кривые численности зайца и рыси в Канаде

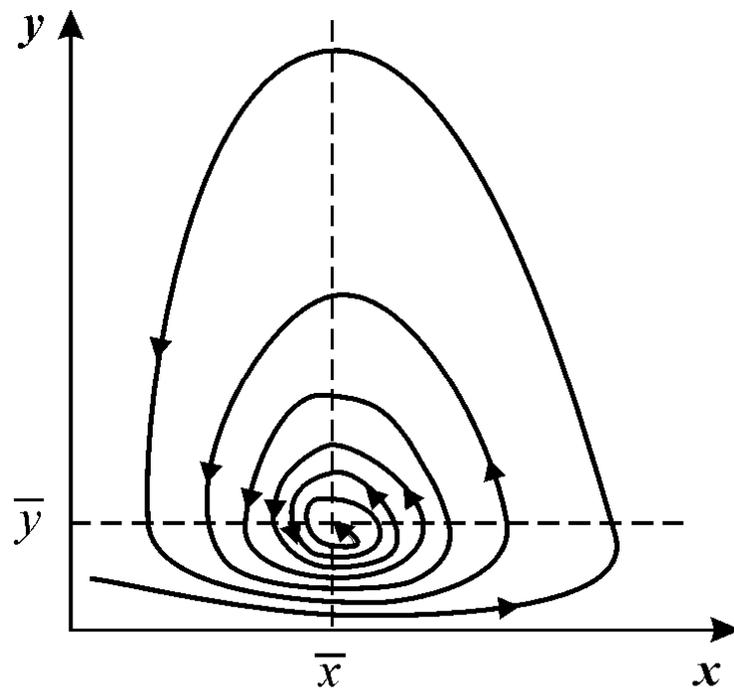
(по К. Вилли, В. Детье, 1974)



Уравнения Вольтерра с учетом самоограничения численности

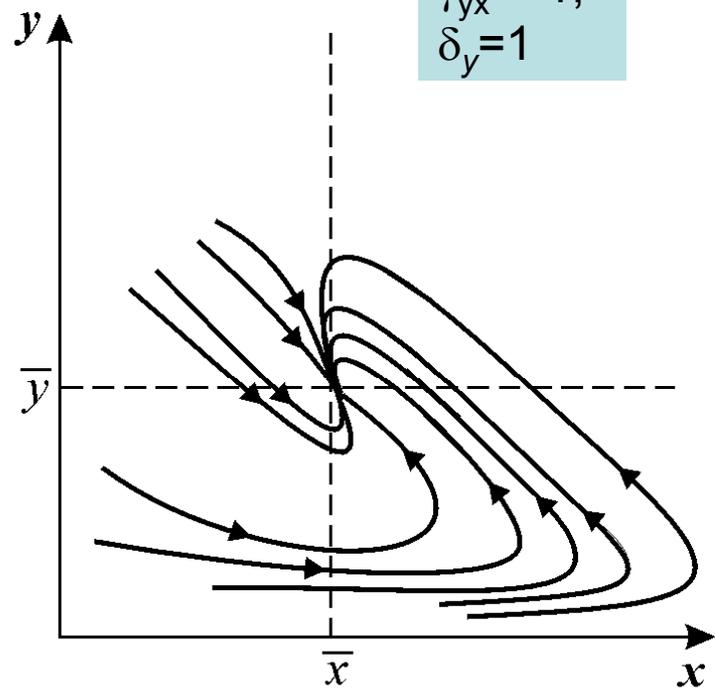
$$\frac{dx}{dt} = x(\varepsilon_x - \gamma_{xy}y - \delta_x x),$$
$$\frac{dy}{dt} = y(\varepsilon_y + \gamma_{yx}x - \delta_y y).$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= 2, \\ \gamma_{xy} &= 18, \\ \delta_x &= 1, \\ \varepsilon_y &= 3, \\ \gamma_{yx} &= 5, \\ \delta_y &= 1 \end{aligned}$$



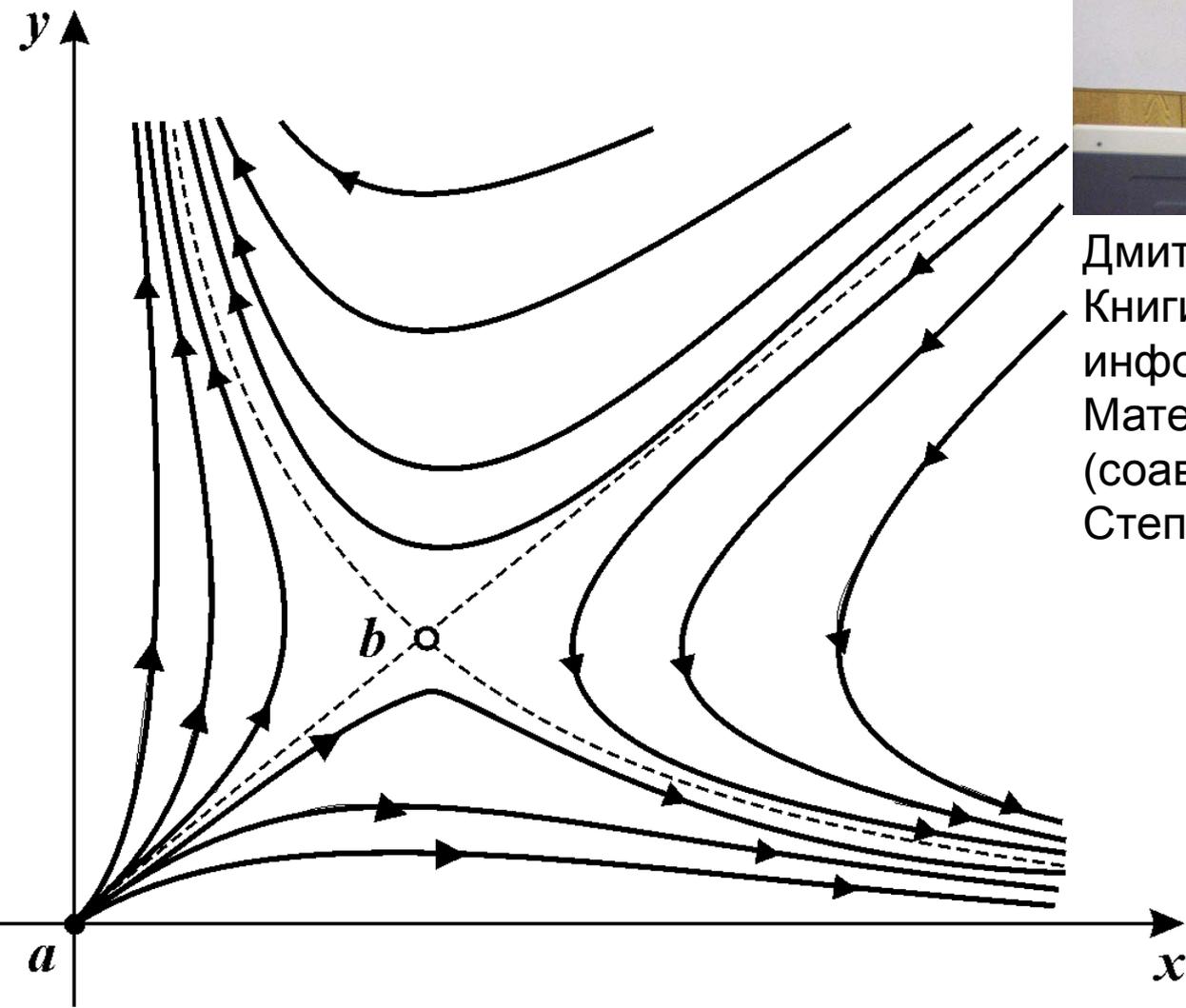
a

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= 2, \\ \gamma_{xy} &= 1, \\ \delta_x &= 1, \\ \varepsilon_y &= 3, \\ \gamma_{yx} &= 1, \\ \delta_y &= 1 \end{aligned}$$



b

Отбор одного из двух равноправных (конкуренция)



Дмитрий Сергеевич Чернавский
Книги: Синергетика и
информатика (2004);
Математическая биофизика
(соавторы. Романовский,
Степанова) 2004

$$\frac{dx}{dt} = ax - \gamma xy;$$
$$\frac{dy}{dt} = ay - \gamma xy.$$