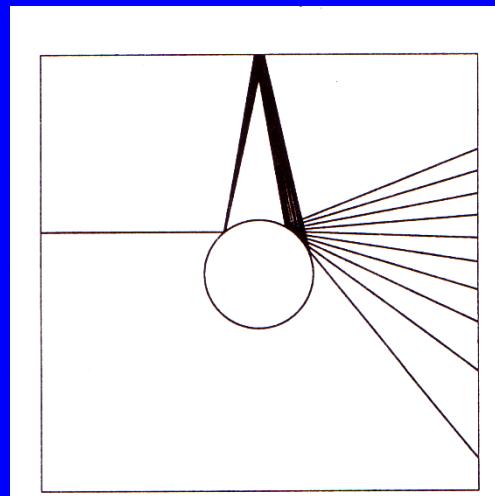
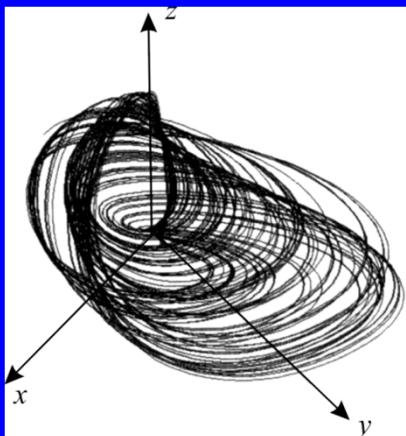
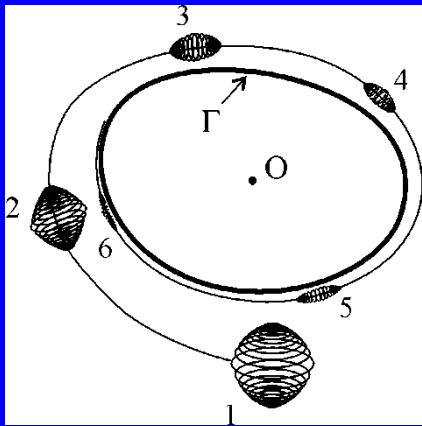


Г.Ю Ризниченко



# Динамический хаос



# Фото Роберта Гендлера. Созвездие стрельца



- Бесформенная совокупность материи и пространства (Противоположно Космосу – упорядоченности). Все рождается из Хаоса (древнегреческое).
- Беспорядок, неразбериха, смешение. Значение появилось в ранне-христианские времена

# Динамический хаос. Основные понятия

- *Основные понятия теории динамических систем.*
- *Предельные множества. Аттракторы.*
- *Страные аттракторы. Динамический хаос.*
- *Размерность странных аттракторов. Фракталы*

# χαος

# CHAOS

Weather

Э.Лоренц

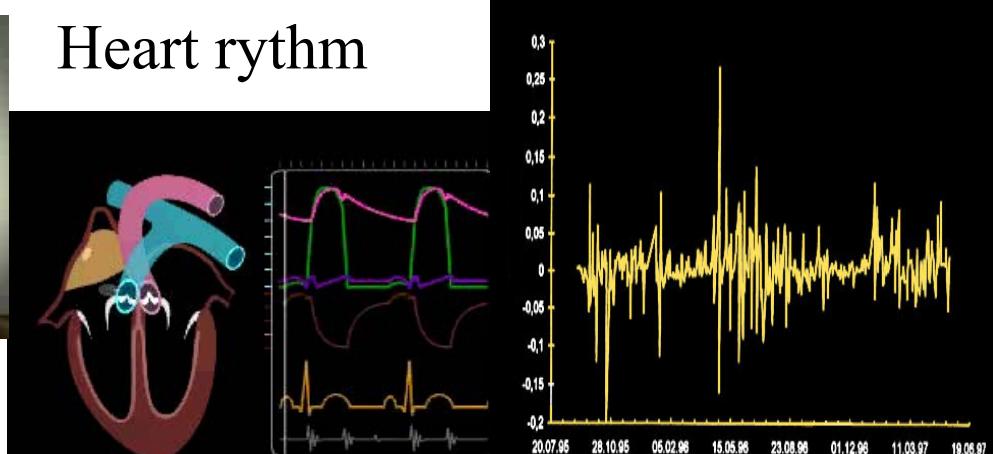
Chemical  
Kinetics



BZ-reaction

Белоусов и  
Жаботинский

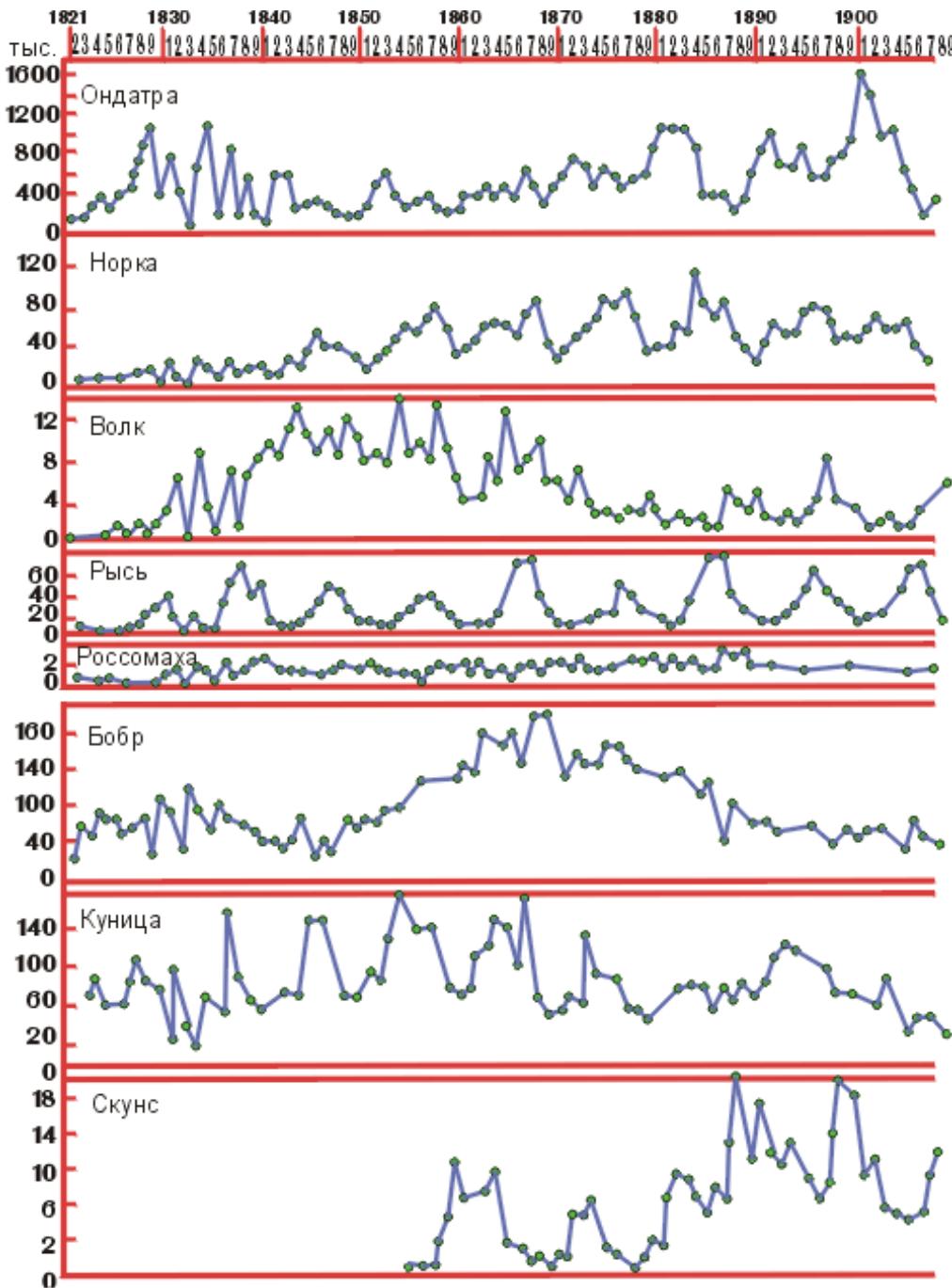
Heart rythm



Биржевые  
индексы

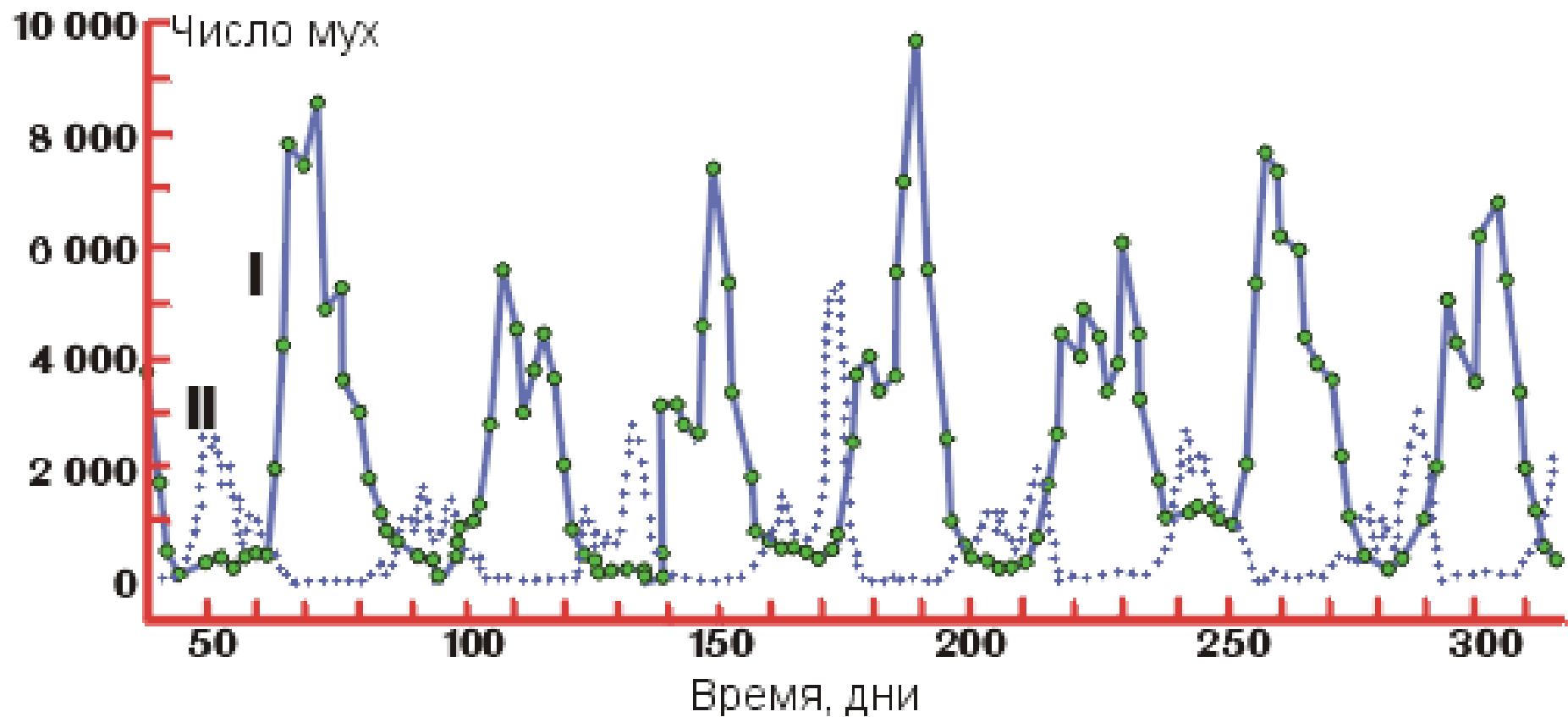


Александр  
Юрьевич  
Лоскутов  
1960-2011

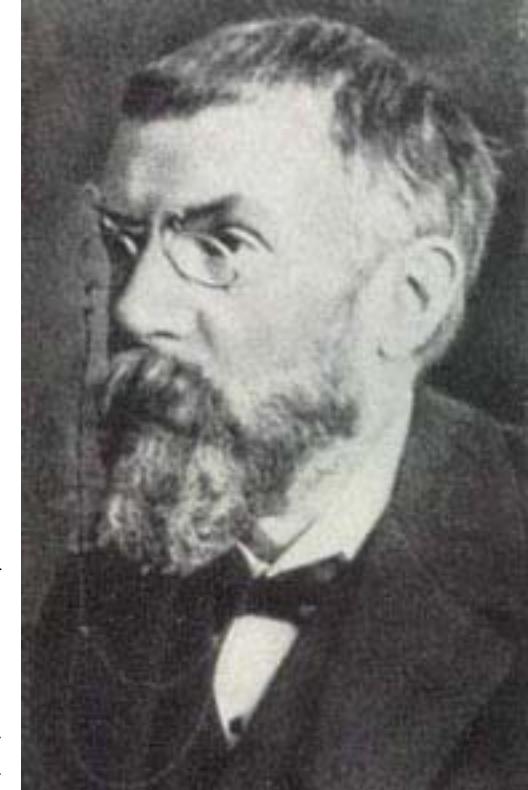


Данные по  
заготовкам  
пушнины  
компании  
Гудзонова  
Залива

# Динамика численности плодовой мушки



Анри Пуанкаре –  
великий французский математик  
в книге «Наука и метод» в 1908 г. писал:



«В неустойчивых системах совершенно ничтожная причина, ускользающая от нас по своей малости, вызывает значительные действия, которые мы не в состоянии предугадать... Предсказание становится невозможным, мы имеем перед собой явление случайное».

# Лоренц

Lorenz EN (1963)  
Deterministic non-periodic  
flow. J. Atmos. Sci: 20, 131-141

Конвекция в подогреваемом снизу слое жидкости,  
модель водяного колеса, одномодовый лазер, диссипативный  
осциллятор с инерционным возбуждением

$$\dot{x} = \sigma y - \sigma x,$$

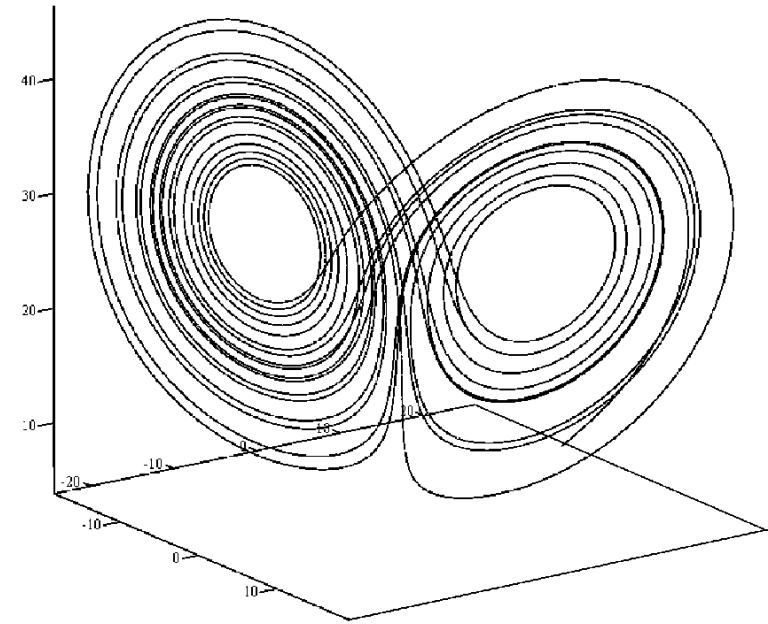
$$\dot{y} = r x - y - x z,$$

$$\dot{z} = x y - b z.$$

$r=28$ ,  $s=10$ ,

$b=8/3$

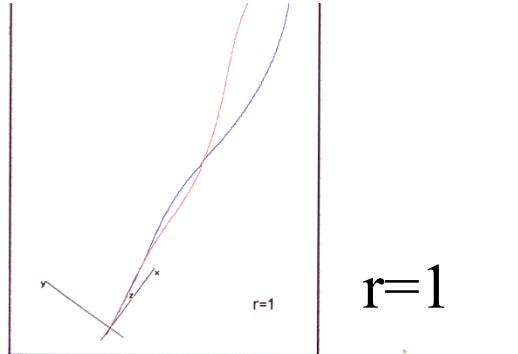
Хаотические траектории в  
системе Лоренца



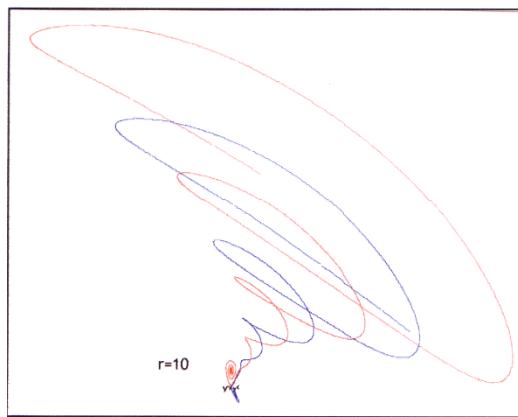
•**Одномодовый лазер.** Здесь  $x$  — амплитуда волн в [резонаторе](#) лазера,  $y$  — [поляризация](#),  $z$  — инверсия населённостей [энергетических уровней](#),  $b$  и  $\sigma$  — отношения коэффициентов [релаксации](#) инверсии и поля к коэффициенту релаксации поляризации,  $r$  — интенсивность [накачки](#).

# Траектории системы Лоренца при разных значениях параметра $r$

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma y - \sigma x, \\ \dot{y} &= rx - y - xz, \\ \dot{z} &= xy - bz.\end{aligned}$$

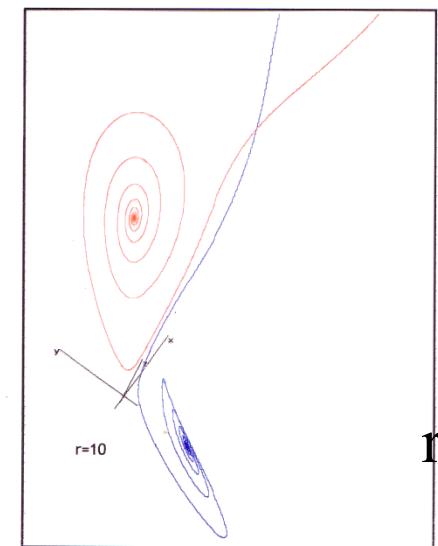


$r=1$

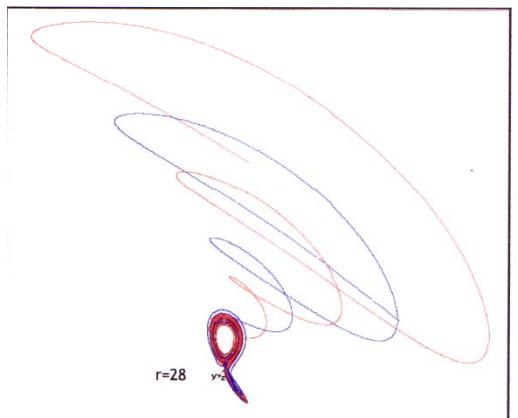


$r=10$

Игорь Федик  
каф. биофизики

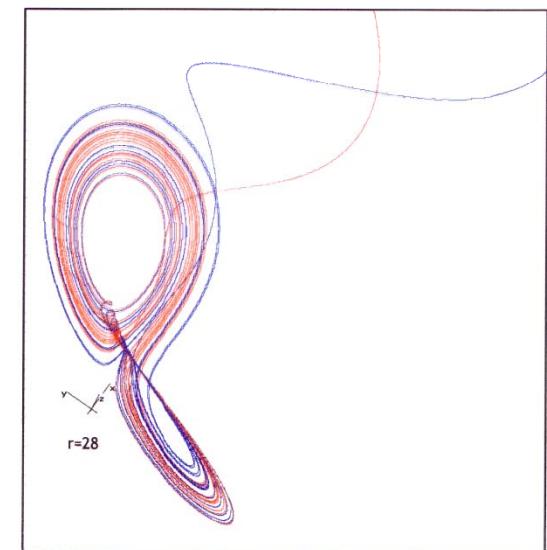


$r=10$



$r=28$

$r=28$



$r=28$

## Система Лоренца 1

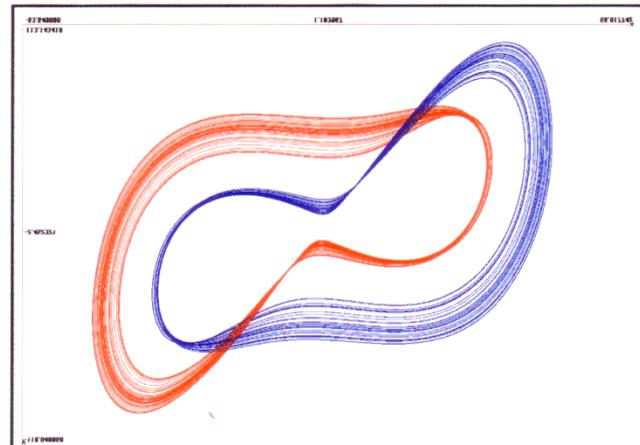
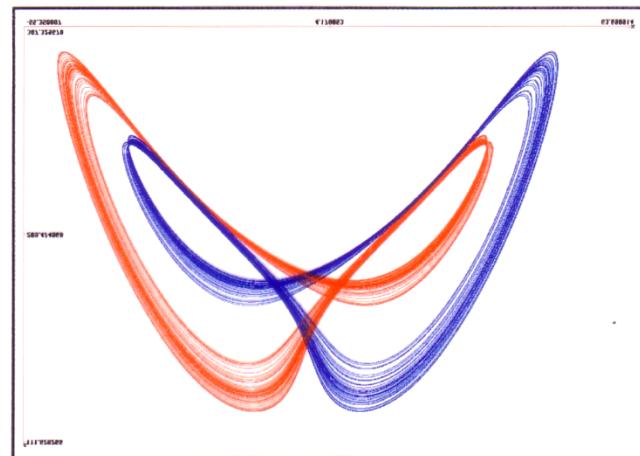
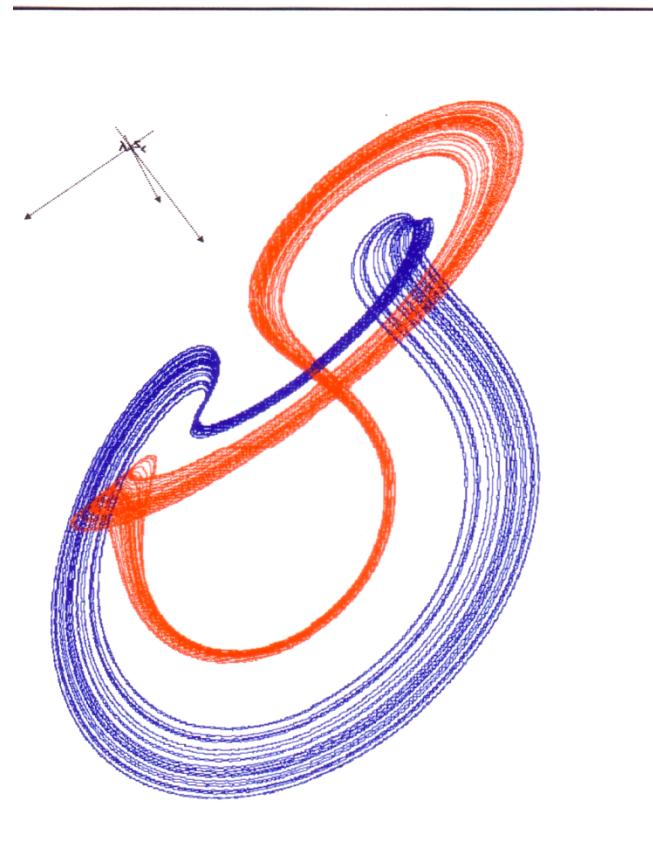


$$\dot{x} = \sigma y - \sigma x,$$

$$\dot{y} = rx - y - xz,$$

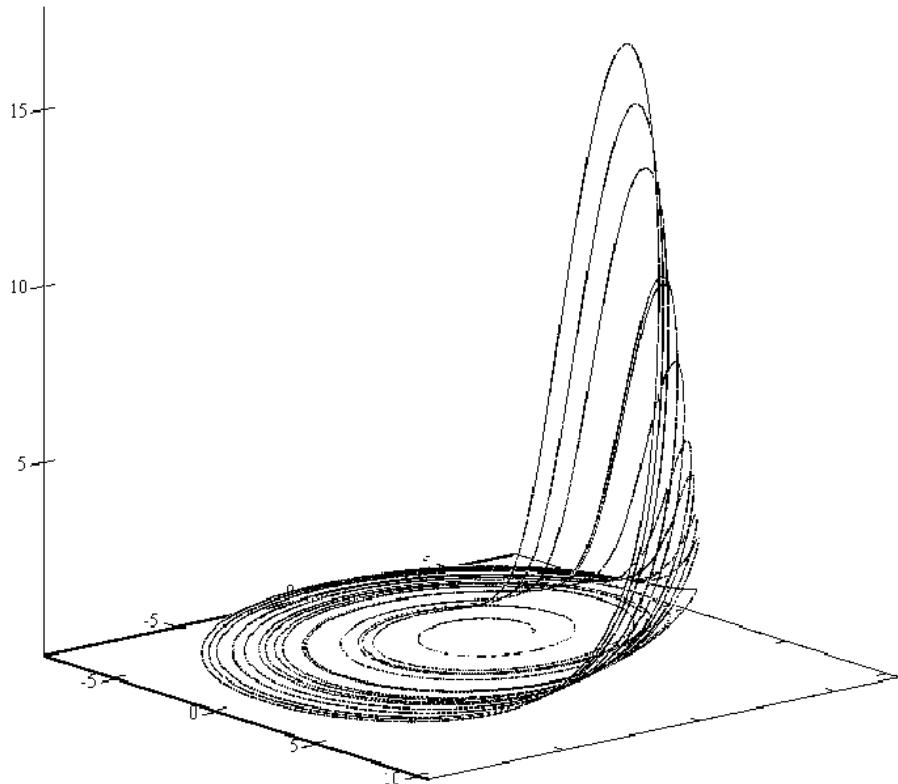
$$\dot{z} = xy - bz.$$

$$r=28, s=10, b=8/3$$



Edward Norton  
Lorenz  
1917-2008  
Американский  
математик и  
метеоролог  
Один из основателей  
теории хаоса

# Хаос в непрерывной системе. Аттрактор Ресслера



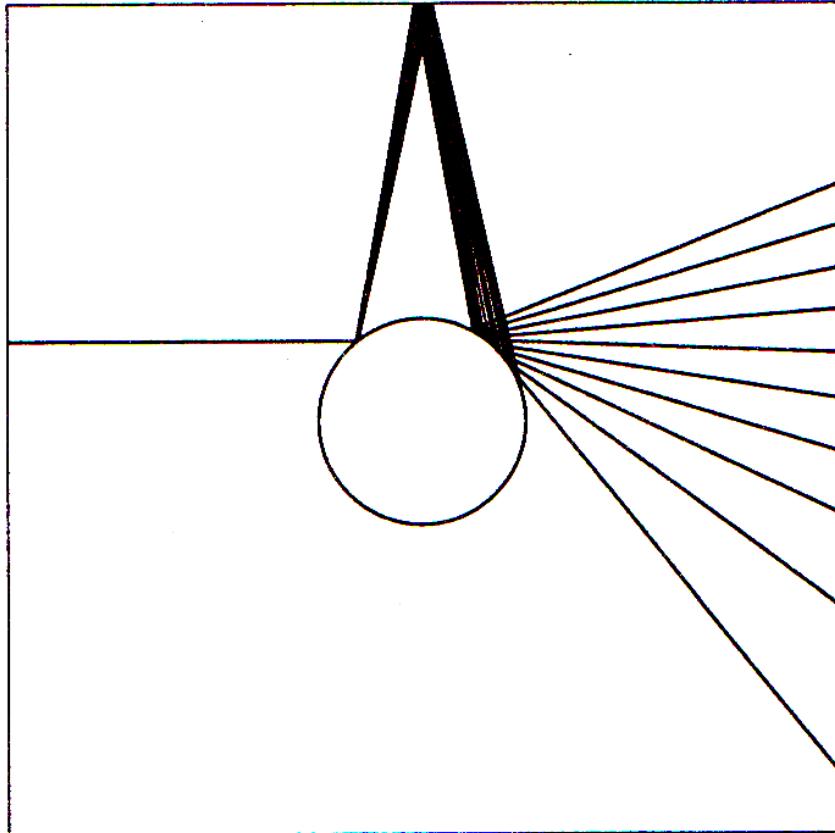
$$\begin{aligned}\dot{x} &= -(x + y), \\ \dot{y} &= x + \alpha y, \\ \dot{z} &= \alpha + z(x - \mu).\end{aligned}$$

# Хаотическое поведение возникает

- не из-за внешних источников шума (их нет в системе Лоренца);
- не из-за бесконечного количества степеней свободы (их три в системе Лоренца);
- не из-за неопределенности, связанной с квантовой механикой (рассматриваемые системы чисто классические).

Настоящая причина нерегулярности определяется свойством нелинейных систем экспоненциально быстро разводить первоначально близкие траектории в ограниченной области фазового пространства

# Разбегание траекторий



Из книги «Черный лебедь»

Потребность в определенности –  
естественная биологическая  
потребность человека,  
но она же – порок мышления

Нассим  
Николас  
Талеб

# Черный лебедь



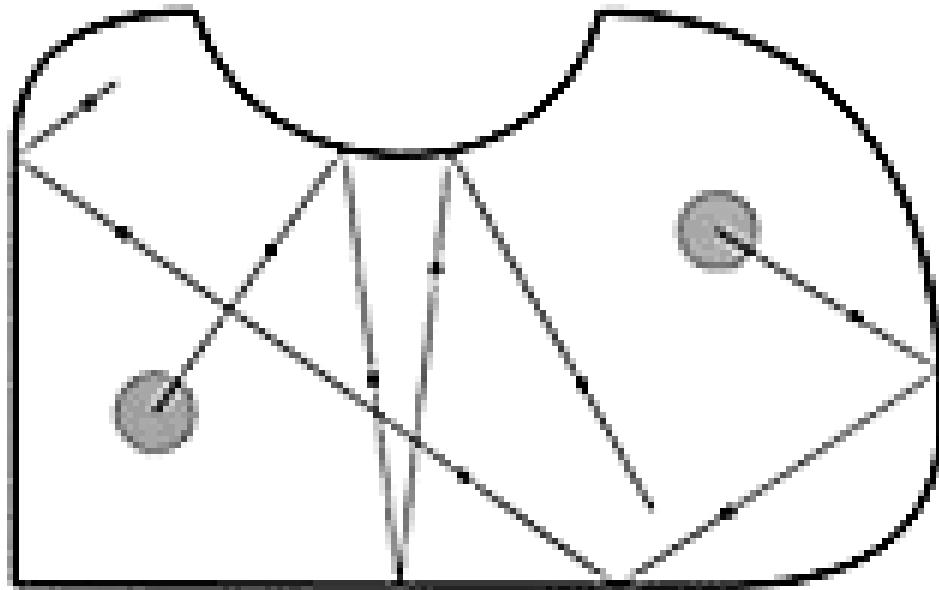
Под знаком непредсказуемости

# Хаотическое поведение означает

- *неустойчивость фазовых траекторий,*
- *рост малого начального возмущения во времени,*
- *перемешивание элементов фазового объема, и, как следствие,*
- *непредсказуемость поведения системы на больших временах*



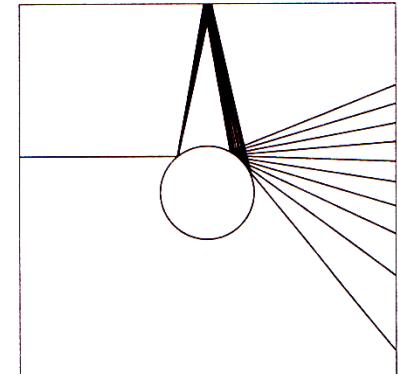
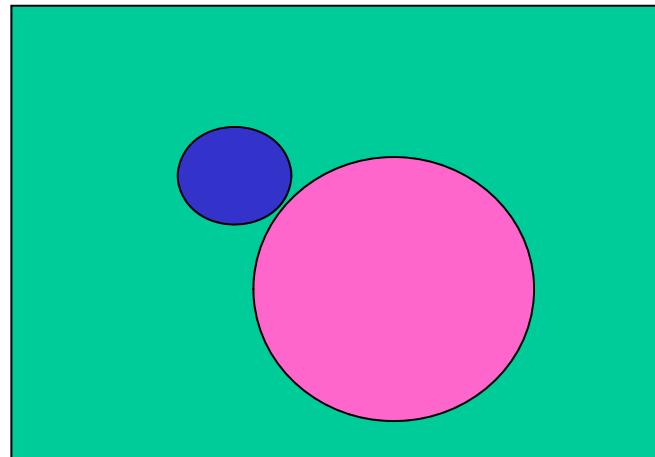
# Биллиард Синая



Яков Григорьевич  
Синай

Лауреат Абелевской  
премии март 2014 г.

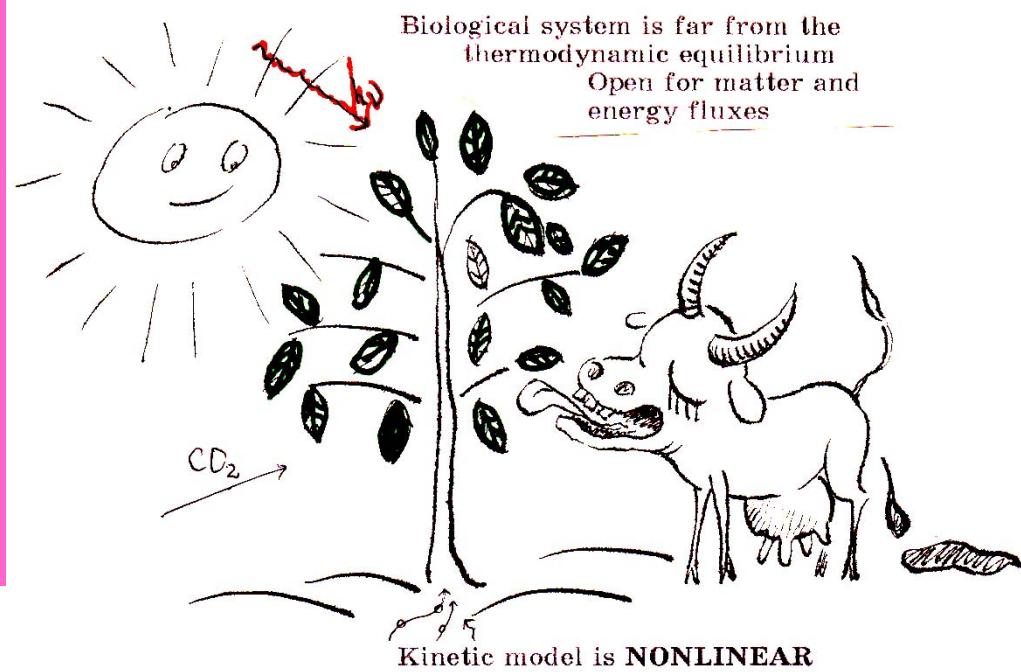
Профессор Мехмата МГУ.  
Работы по теории  
динамических систем,  
статистической физике



# НЕЛИНЕЙНОСТЬ

- является необходимым (но не достаточным) условием существования динамического (детерминированного) хаоса

Линейные  
дифференциальные  
и разностные  
уравнения не  
приводят к хаосу.



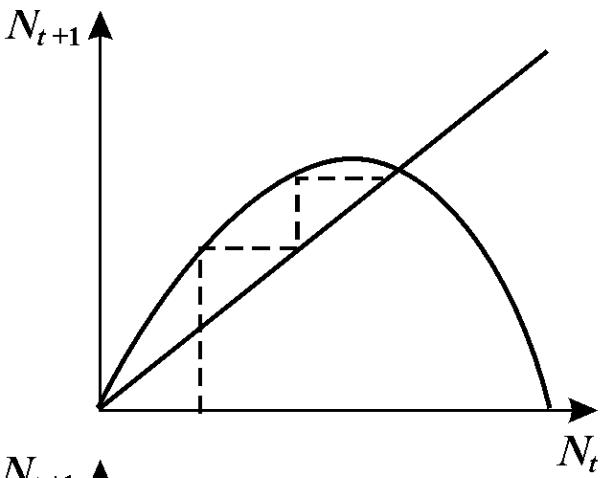
# Детерминированные системы

**однозначно** задан закон изменения системы с течением времени.

*Детерминированность* означает, что зависимость будущего состояния  $x(t)$  можно записать в виде:

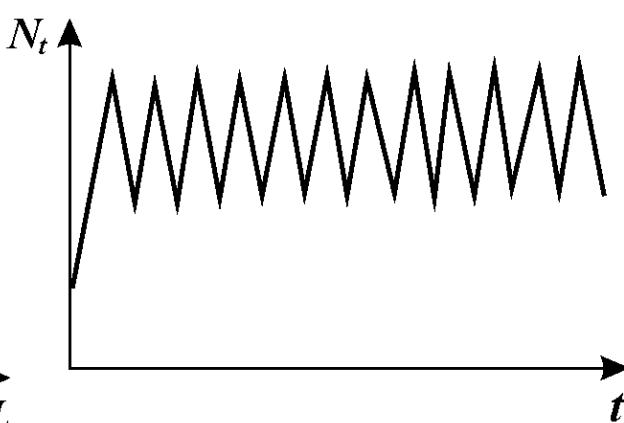
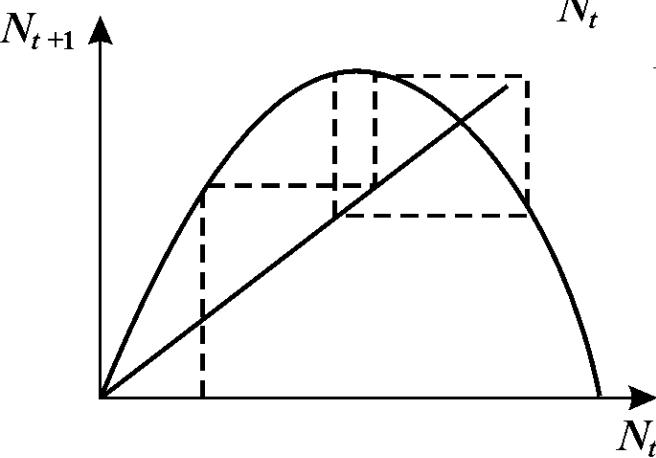
$$x(t) = F [x(t_0)] .$$

Здесь  $F$  – детерминированный закон (оператор), который осуществляет строго однозначное преобразование начального состояния  $x(t_0)$  в будущее состояние  $x(t)$  для любого  $t > t_0$ .

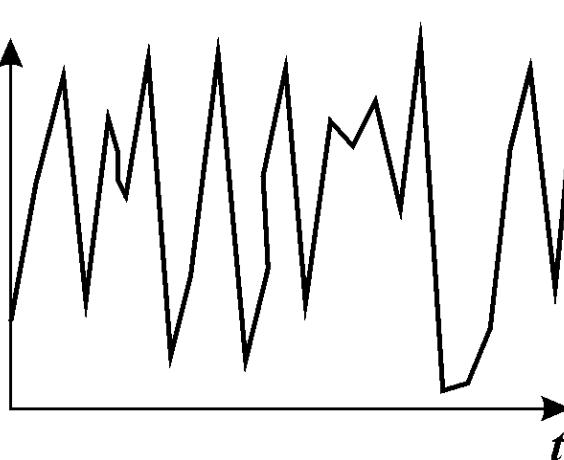
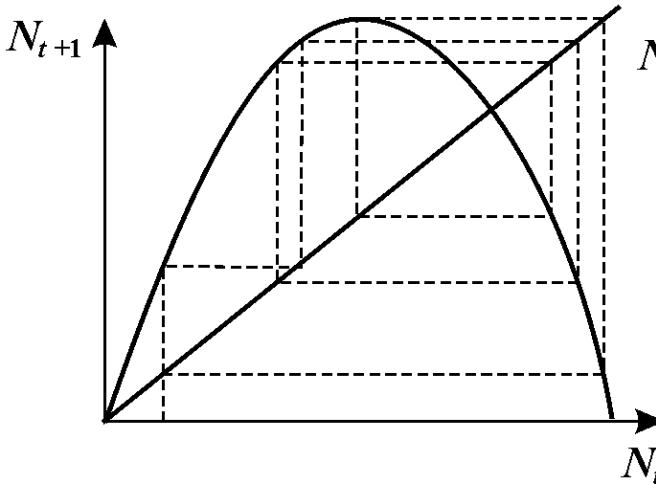


**Квадратичное  
отображение**

$$N_{t+1} = aN_t(1-N_t)$$



*б*

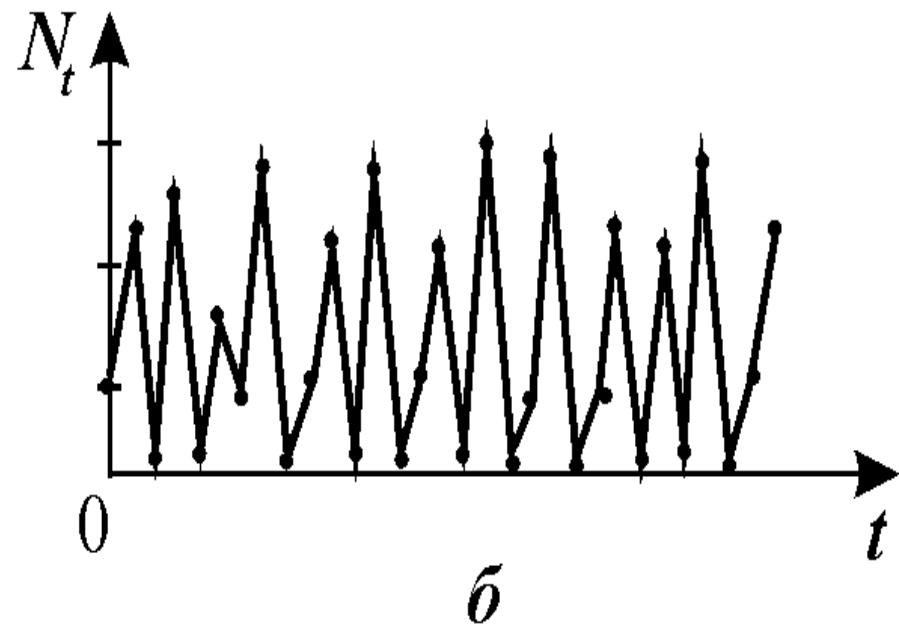
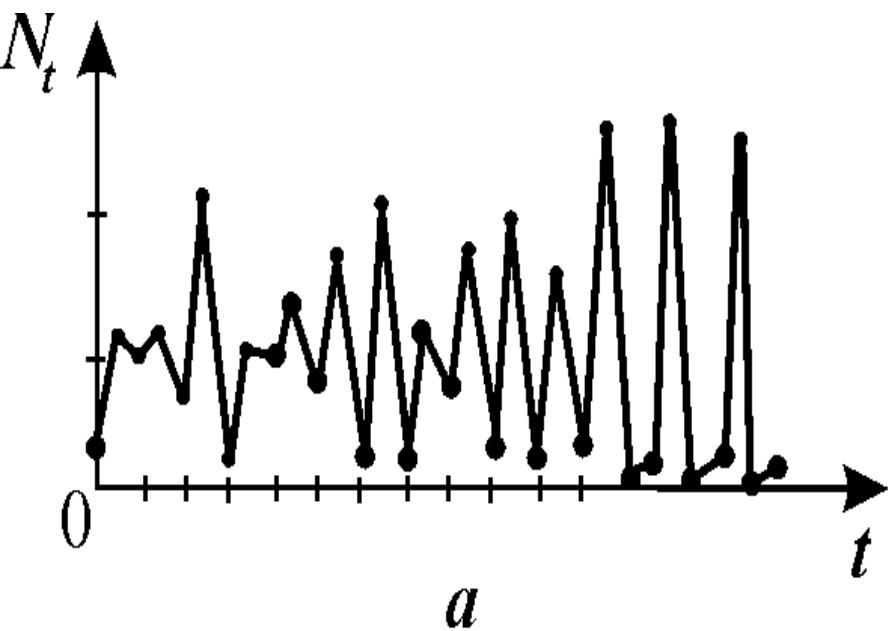


*в*

**Пример  
детерминиро-  
ванного  
хаоса**

$$N_{t+1} = N_t \exp\left\{r\left(1 - \frac{N_t}{K}\right)\right\}$$

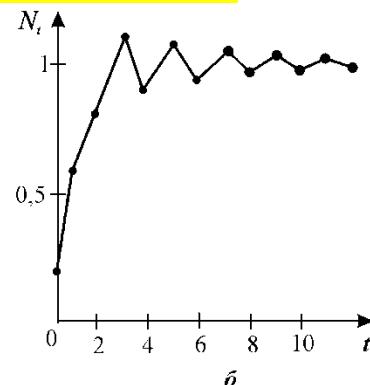
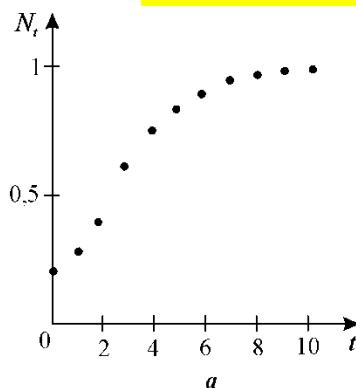
Дискретный аналог  
логистического уравнения



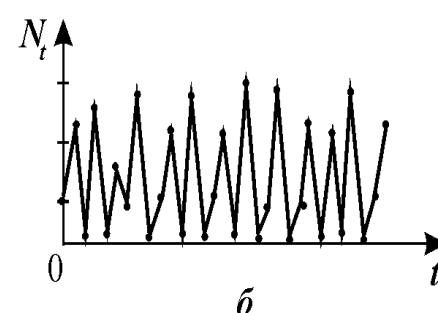
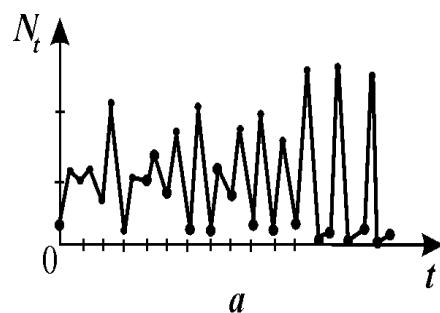
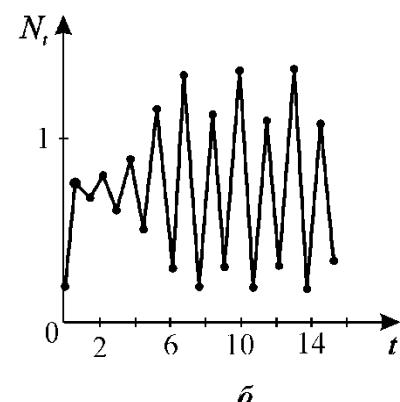
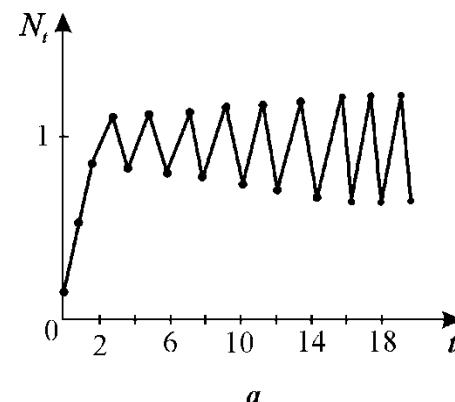
При  $r > r_c = 3,102$  решение зависит от начальных условий существуют *трехточечные циклы* и *квазистохастические решения*.

Равновесие устойчиво, если  $0 < r < 2$ ,  
 решение монотонно при  $0 < r < 1$  и представляет собой затухающие колебания  
 при  $1 < r < 2$   
 при  $2 < r = r_2 < 2,526$  – двухточечные циклы;  
 при  $r_2 < r < r_c$  появляются циклы длины  $4, 8, 16, \dots, 2k$   
 при  $r > r_c = 3,102$  решение зависит от начальных условий. Существуют  
 трехточечные циклы и квазистохастические решения

Устойчивое решение



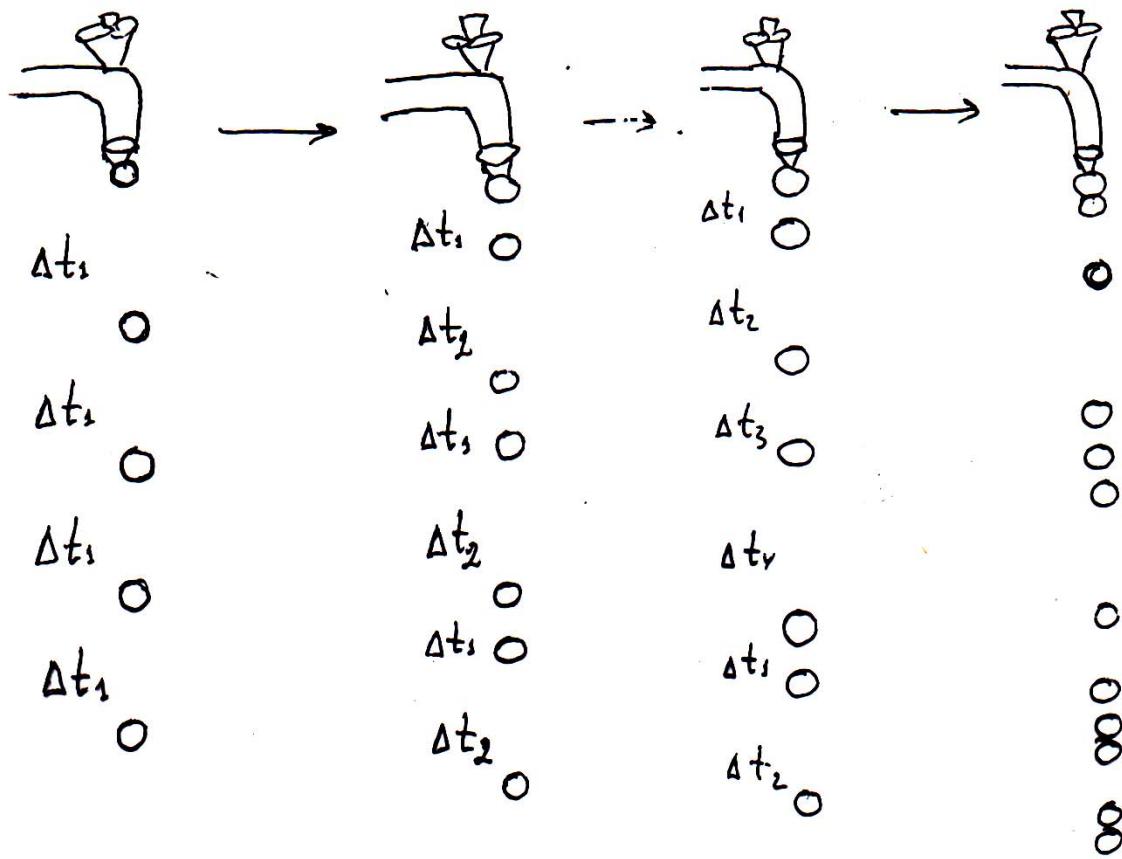
Циклы длины  $2k$



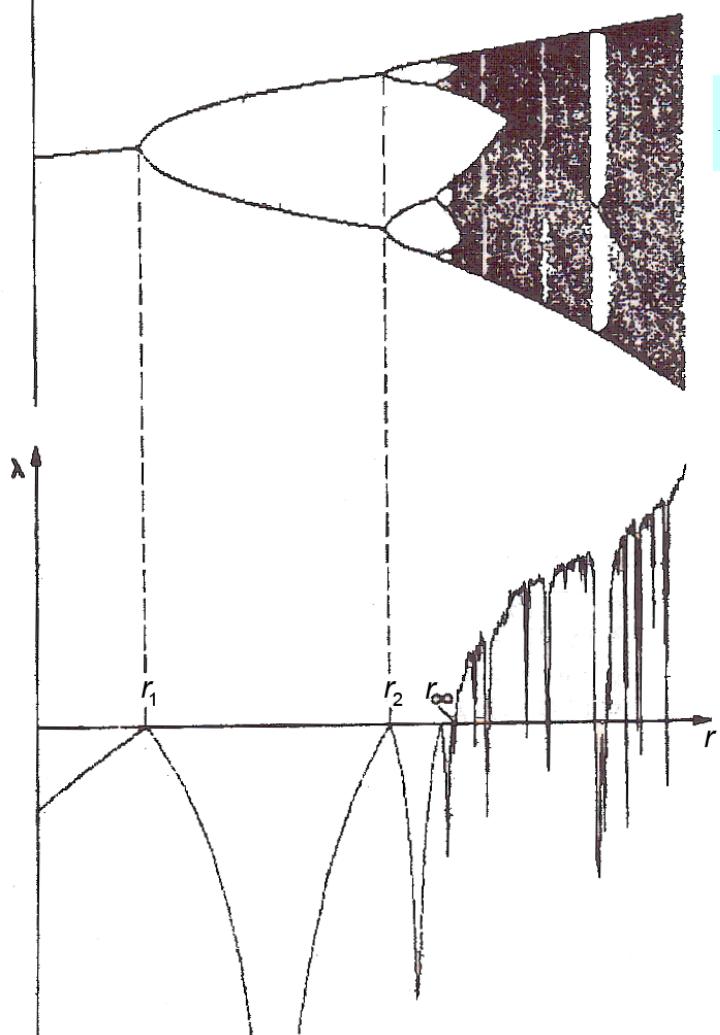
Динамический хаос

$$N_{t+1} = N_t \exp\left\{r\left(1 - \frac{N_t}{K}\right)\right\}$$

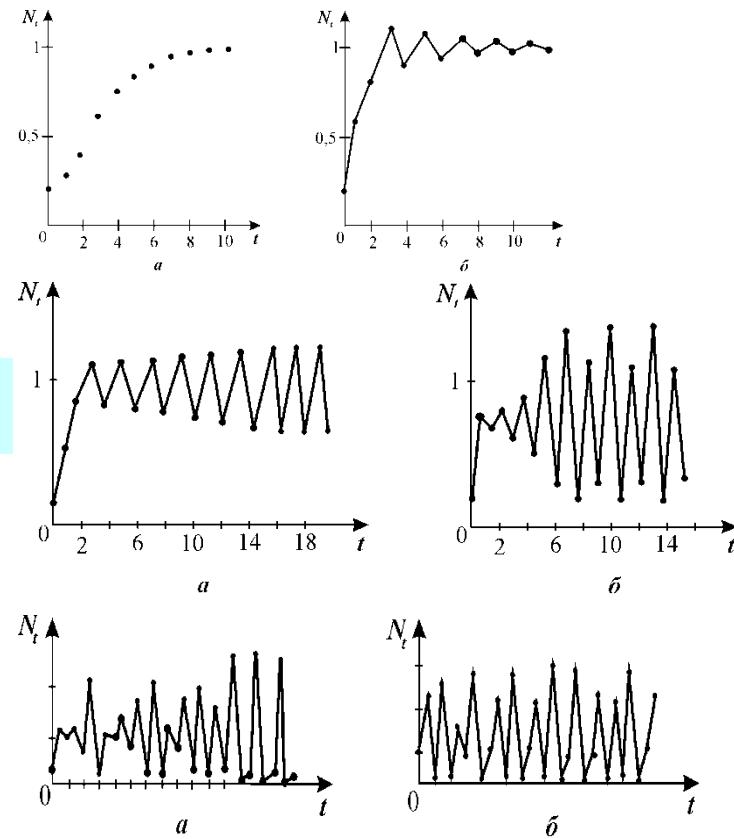
# Переход к хаосу через удвоение периода



## Сценарий удвоения предельного цикла



$$N_{t+1} = N_t \exp\left(r\left(1 - \frac{N_t}{K}\right)\right)$$



Показатель Ляпунова – характеризует устойчивость траектории

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t - t_0} \ln \|y^i(t)\|.$$

Ляпуновский показатель – это усредненное вдоль исследуемой траектории значение действительной части собственного значения  $\rho i$  матрицы линеаризации. Устойчивость траектории по Ляпунову означает, что произвольное начальное возмущение  $y(t^*)$  в среднем вдоль траектории не возрастает. Для этого необходимо и достаточно, чтобы спектр ляпуновских показателей  $\lambda i$  не содержал положительных показателей.

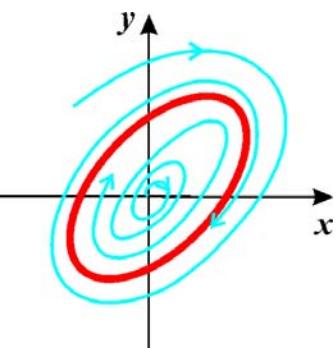
# Устойчивость и неустойчивость движения

## Устойчивость по Ляпунову

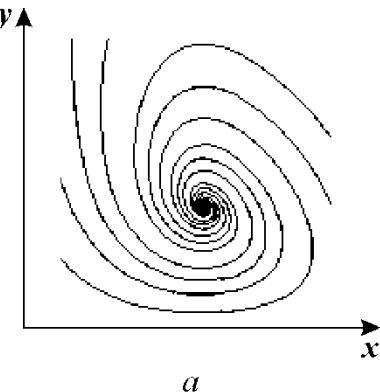
Для *устойчивого по Ляпунову* движения малое начальное возмущение не нарастает. Т.е. *движение устойчиво по Ляпунову, если для любого  $\varepsilon > 0$  можно указать такое  $\delta(\varepsilon)$ , что для всякого движения  $x(t)$ , для которого  $\|x(t) - x^*(t)\| < \delta$ , при всех  $t > t_0$  выполняется неравенство:  $\|x(t) - x^*(t)\| < \varepsilon$ .*

Знак  $\| \|$  означает норму (длину) вектора.

# Устойчивость по Пуассону



предполагает, что соответствующая фазовая траектория при  $t \rightarrow \infty$  не покидает ограниченной области фазового пространства. Находясь в этой области бесконечно долго, она неизбежно будет возвращаться в сколь угодно малую окрестность начальной точки. Времена возврата могут соответствовать *периоду* или *квазипериоду* при регулярном движении, а могут представлять собой случайную последовательность, если решение отвечает режиму динамического хаоса.

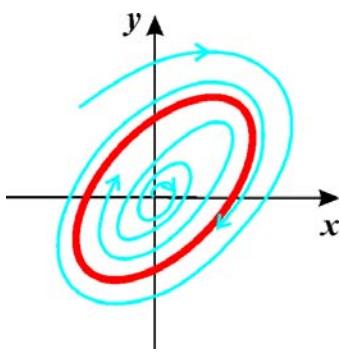


Устойчивый фокус



*б*

## Аттрактор

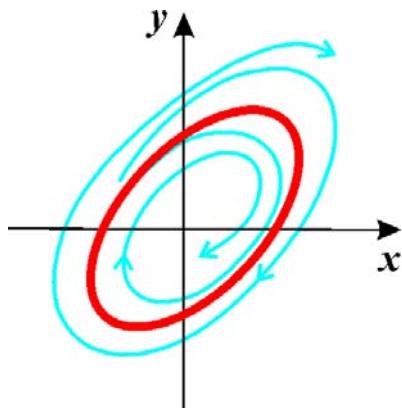


Устойчивый предельный цикл

- Если все точки множества  $V$  будут принадлежать  $L$  при  $t \rightarrow +\infty$ , то  $L$  – *притягивающее предельное множество, или аттрактор*. Тогда  $V$  – *бассейн притяжения аттрактора* (подобно бассейну реки – территории, с которой она собирает свои воды).

# Репеллер

- Если все точки множества  $V$  будут принадлежать  $L$  при  $t \rightarrow -\infty$ , то  $L$  – отталкивающее предельное множество, или *репеллер*.



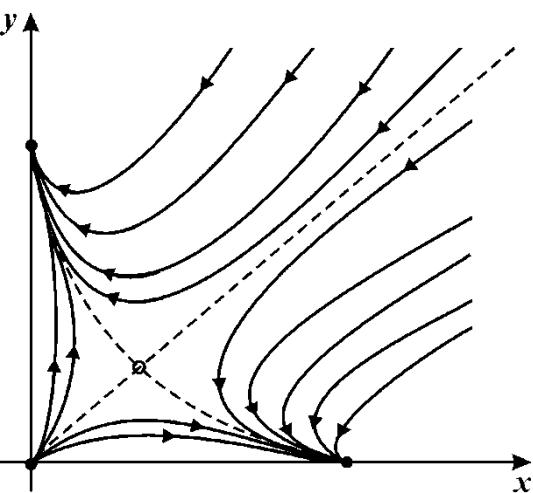
Неустойчивый  
предельный цикл

Неустойчивый узел,

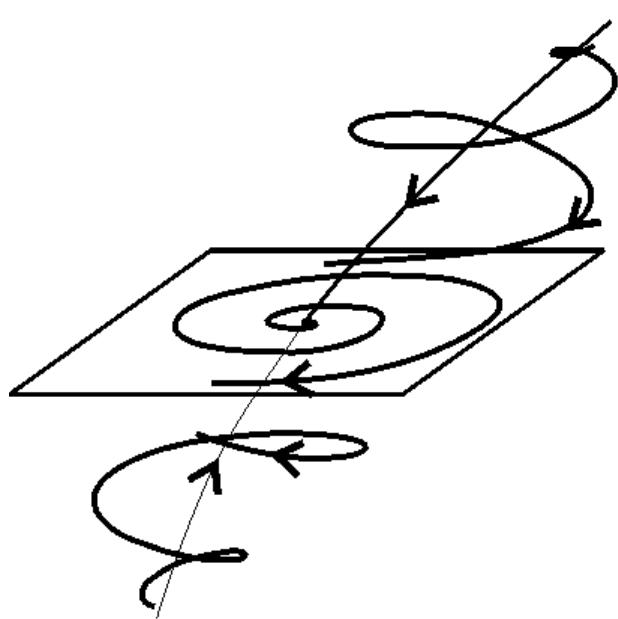
Неустойчивый фокус

# Седловое множество

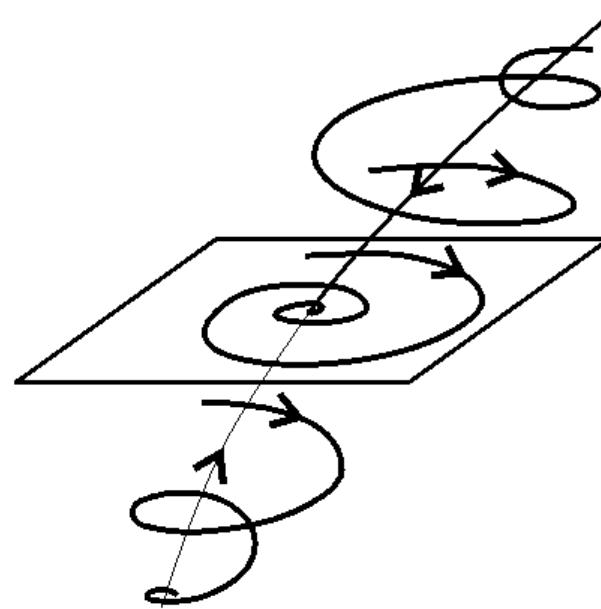
- Если множество  $V$  состоит из двух подмножеств  $V = W^s \cup W^u$ , причем точки, принадлежащие  $W^s$ , стремятся к  $L$  в прямом времени, а точки, принадлежащие  $W^u$ , стремятся к  $L$  в обратном времени, тогда  $L$  называется *седловым предельным множеством* (или *седлом*). Множества  $W^s$  и  $W^u$  – устойчивое и неустойчивое многообразия седла.



# Седло-фокусы



*a*

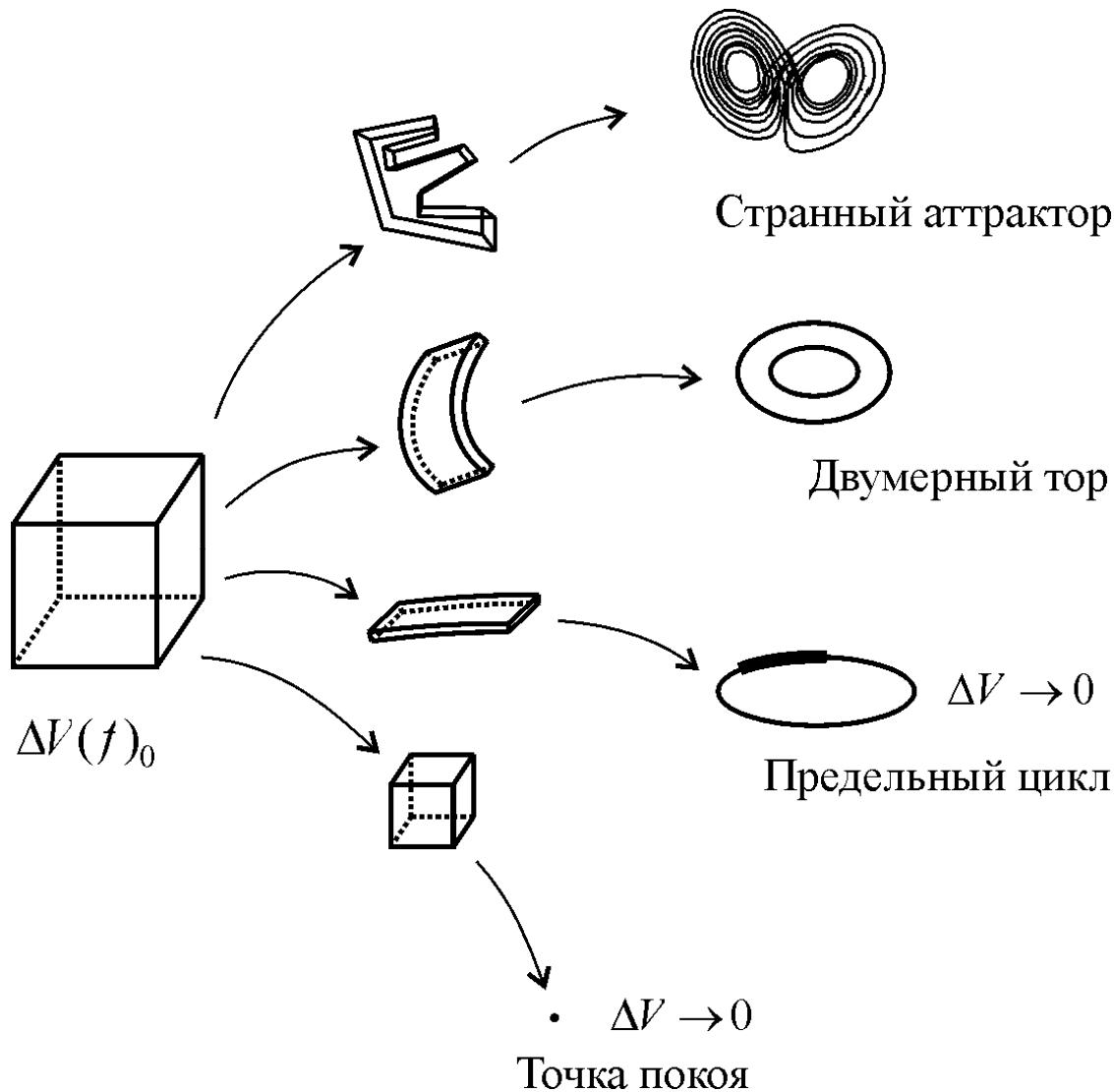


*b*

Седло-фокусы в пространстве  $N = 3$ .

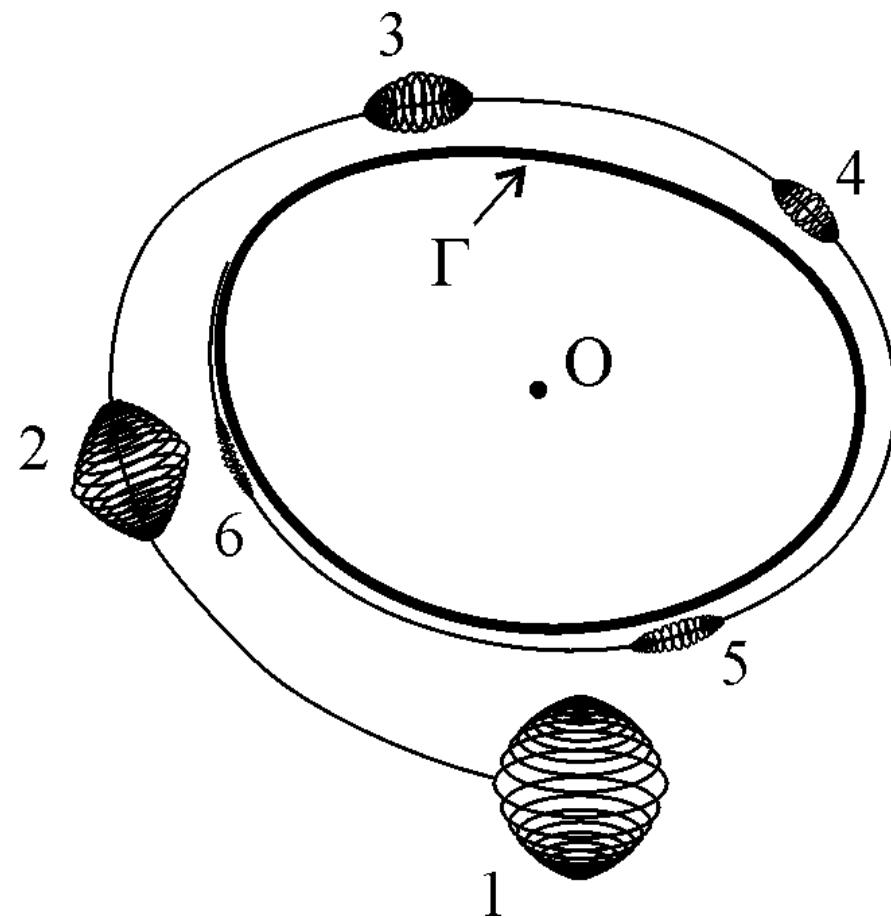
*a)*  $p_1$  – действительно и отрицательно,  $p_{2,3}$  – комплексно сопряженные,  $\operatorname{Re} p_{2,3} > 0$ ; *б)*  $p_1$  – действительно и положительно,  $p_{2,3}$  – комплексно сопряженные,  $\operatorname{Re} p_{2,3} < 0$

# Диссипативные системы

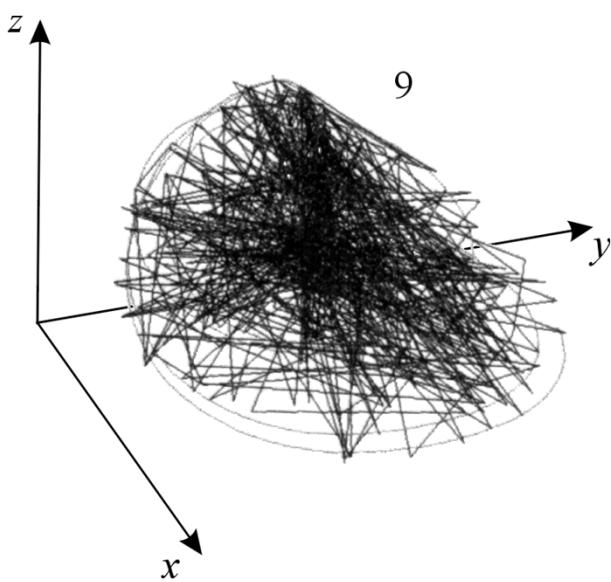
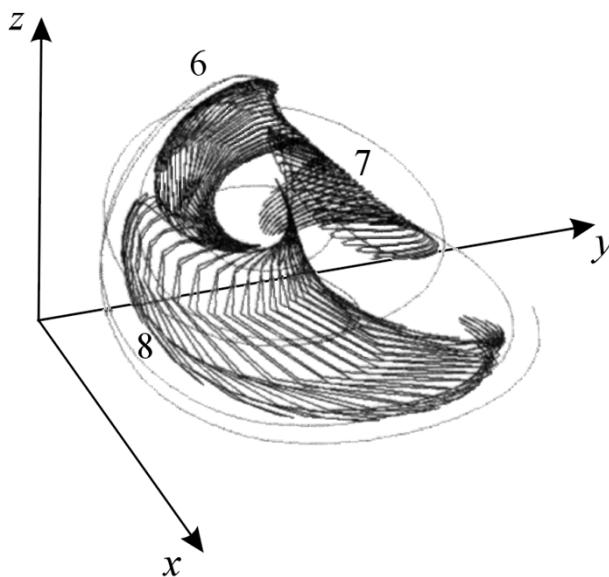
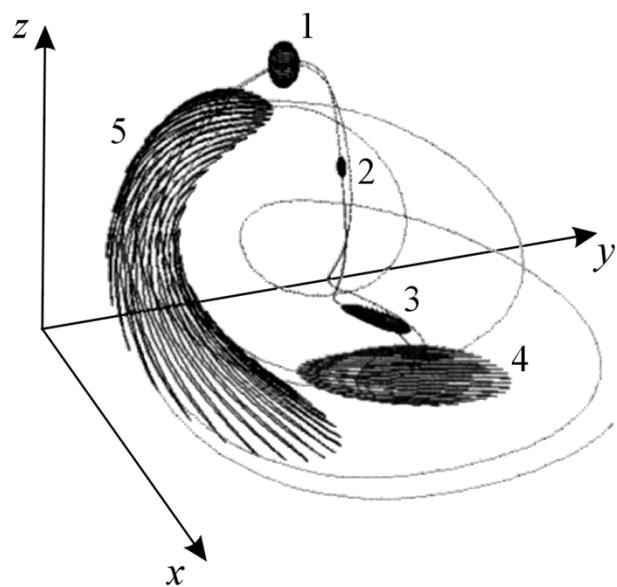


Существование  
аттрактора в  
диссипативной  
системе связано  
со свойством  
скатия элемента  
фазового объема  
под действием  
оператора  
эволюции.

Сжатие элемента фазового пространства радиуса  $\varepsilon$   
при «наматывании» траектории на устойчивый  
предельный цикл -траектория  $\Gamma$ .



Эволюция малого первоначального фазового объема во времени в динамической системе  
 (Анищенко и др., 1999).



$$\dot{x} = mx + y - xz,$$

$$\dot{y} = -x,$$

$$\dot{z} = -gz + gI(x)x^2, \quad I = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

# Фракталы – самоподобные множества



*Benoît  
Mandelbrot*  
1924-2009

Бенуа Мандельброт. 1924-2010. Французский и американский математик. Придумал понятие «фрактал» - “Fractus” (лат) – сломанный, разбитый.



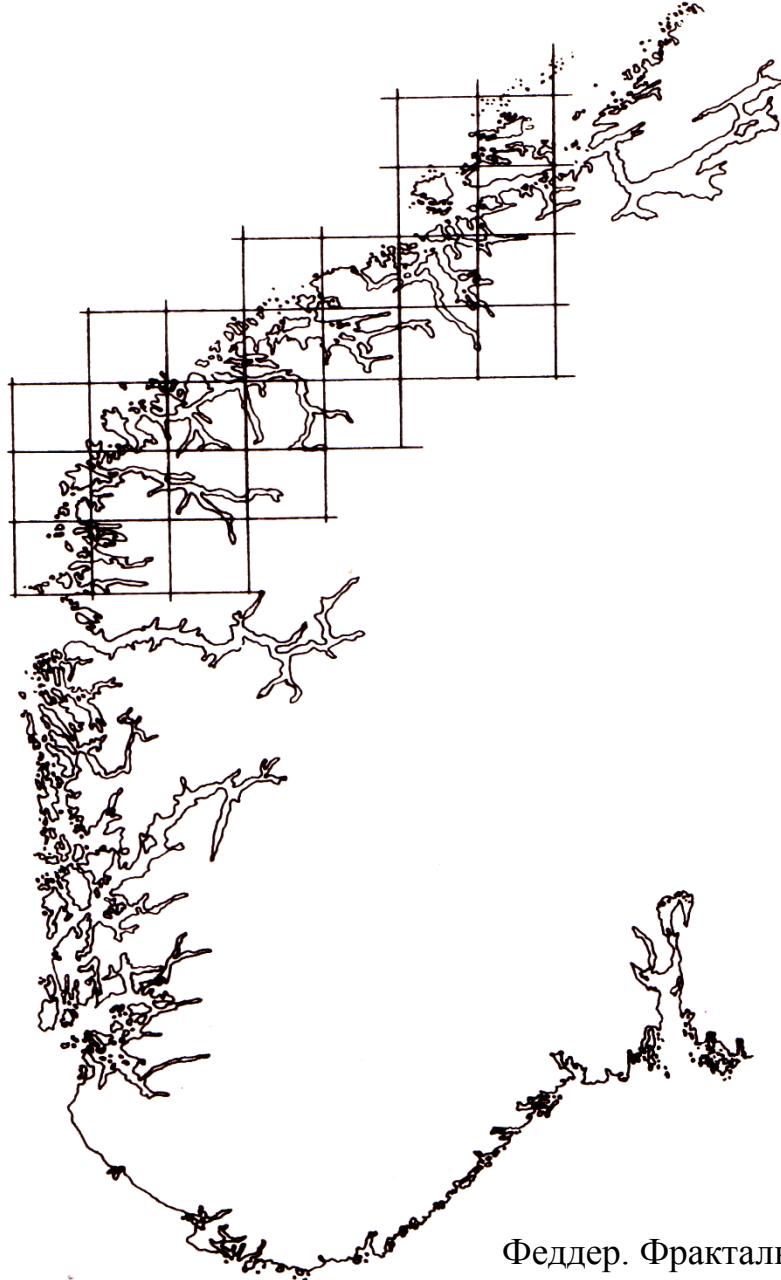
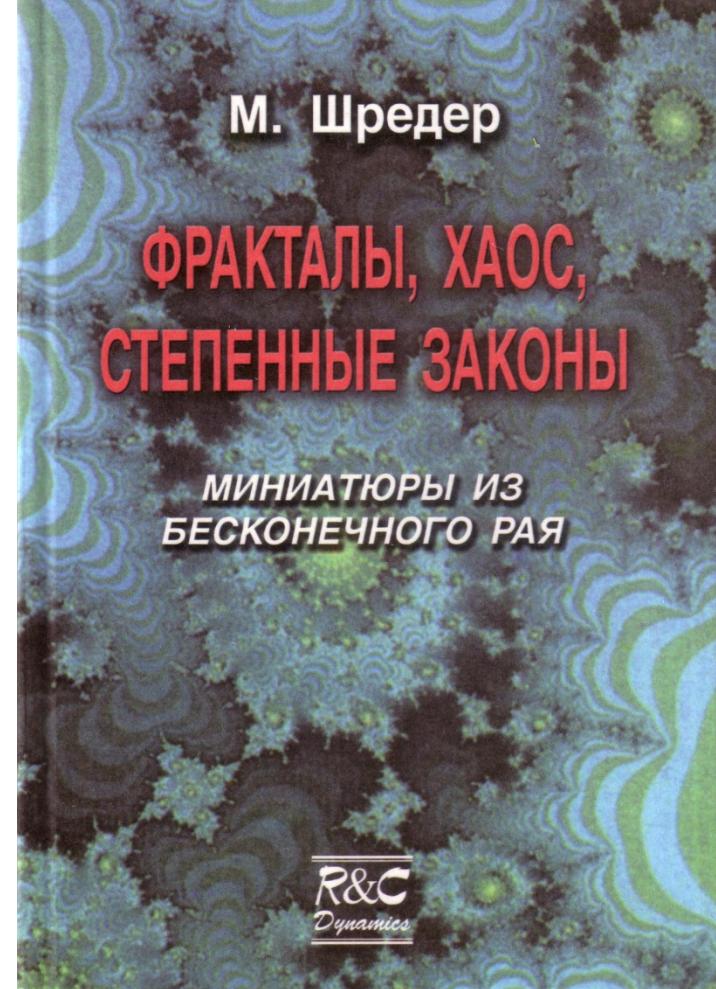


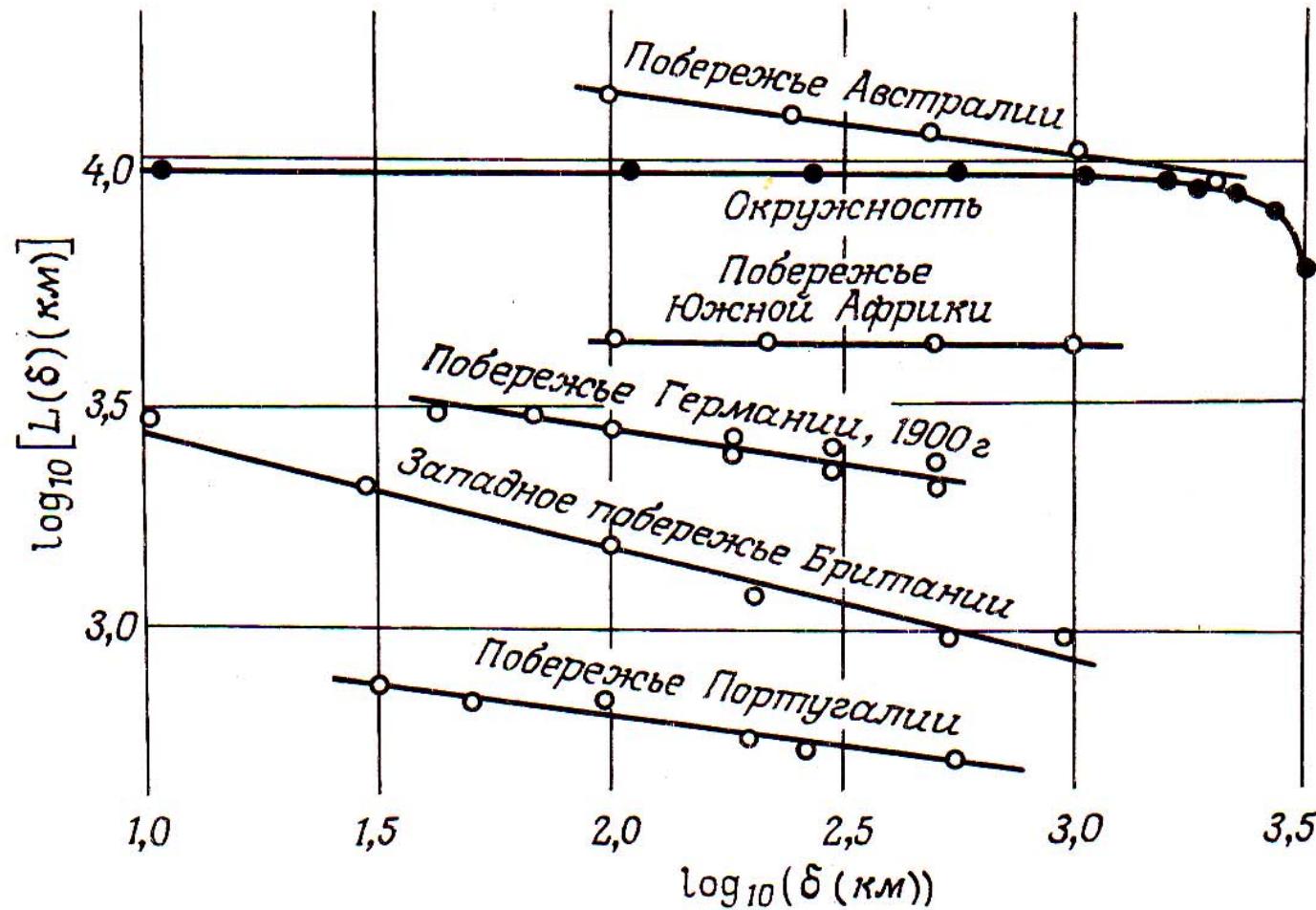
РИС. 2.1. Побережье южной части Норвегии. Береговая линия перечерчена из географического атласа и представлена в цифровом виде с помощью растра, состоящего примерно из  $1800 \times 1200$  ячеек. Изображенная вверху квадратная решетка имеет шаг  $\delta \sim 50$  км.



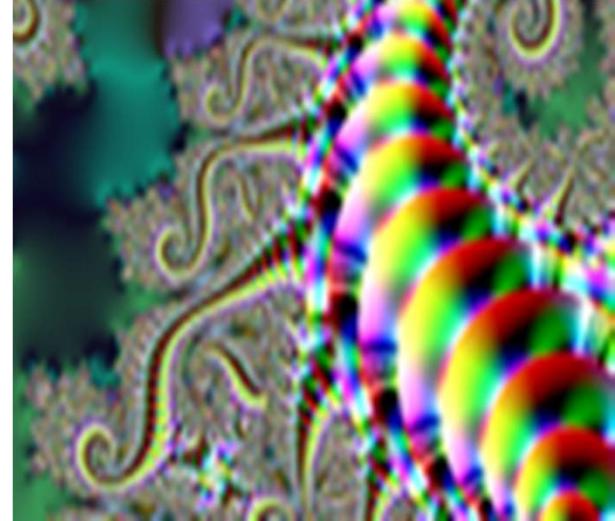
Б.Мандельброт. Фракталы и хаос.  
Множество Мандельброта и другие  
чудеса. Изд. РХД 2009

The Mandelbrot set and beyond.  
Springer

# Длина береговых линий



С. 2.3. Длина береговых линий как функция выбранного шага  $\delta$  (км) [134].



# Определение Фрактала

- Фракталом называется структура, состоящая из частей, которые в каком-то смысле подобны целому.
- Фракталом называется множество, размерность Хаусдорфа-Безиковича которого строго больше его топологической размерности.
- Фракталы – множества точек, вложенные в пространство
- Топологическая размерность линии – 1, поверхности – 2, шара – 3



# Фракталы. Размерность



Длина береговой линии стремится к величине

$$L(\delta) = a\delta^{1-D}$$
$$\delta \rightarrow 0 \qquad N(\delta) \sim 1/\delta^D$$

**Хаусдорф Феликс**  
(Hausdorff Felix, 1868-1942)  
—немецкий математик один из основоположников современной топологии.

Писатель.  
Псевдоним Поль Монгре

Для обычной кривой множитель  $a$  равен количеству отрезков:  $a=L_N$ , а показатель  $D$  равен единице. Но для береговой линии Норвегии  $D \sim 1,52$ . Показатель  $D$  называется размерностью Хаусдорфа-Безиковича или фрактальной размерностью.

# Альвеолы

## человеческого легкого

Оптическая  
микроскопия – 80 кв. м

Электронная  
микроскопия – 140 кв. м  
 $D=2,17$



# Мембранны

Субклеточные мембранны в клетках печени

Внешние митохондриальные мембранны  $D=2,09$

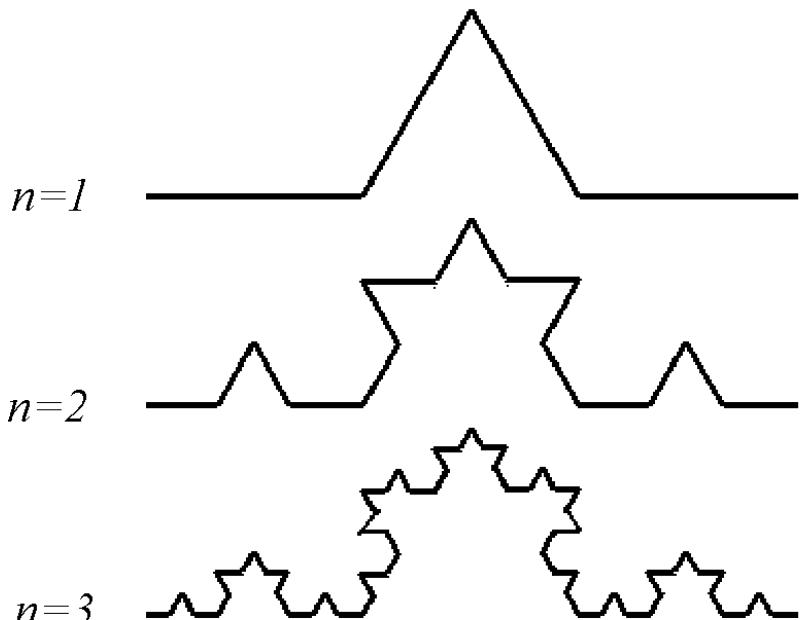
Внутренние митохондриальные мембранны  $D=2,53$



# Кривая Коха.

Первые четыре шага построения.

$n=0$  —————



**фон Кох Нильс Фáбиан Хéльге (1870-1924),**  
шведский математик, автор основополагающих  
работ по теории чисел

Длина кривой 1-го поколения  $L(1/3) = 4/3$ .  
4 звена, длина каждого –  $1/3$

Длина кривой 2-го поколения.  
Число звеньев:  $N=4^2=16$ , длина каждого –  $1/9$

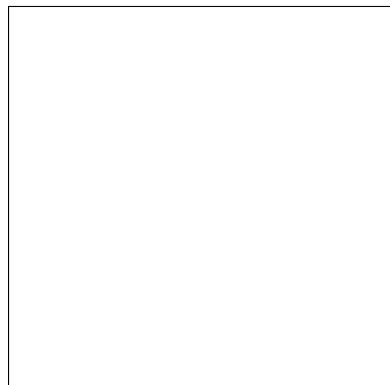
Длина каждого звена:  $\delta=3^{-n}$   
 $n=-\ln \delta/\ln 3$

$$L(\delta)= (4/3)^n = \delta^{1-D} \quad D=\ln 4/\ln 3 \sim 1,2628$$

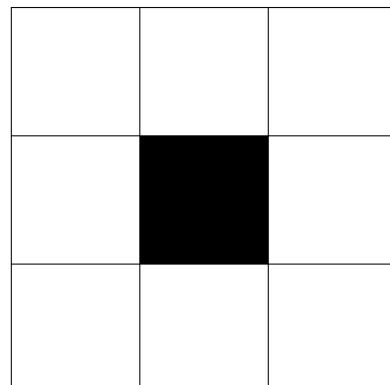


Построение ковра Серпинского. Начальный элемент – белый квадрат со стороной, равной 1. Из него вырезается черный квадрат, со стороной, равной  $1/3$ . Далее из каждого белого квадрата вырезается снова черный квадрат, со стороной, равной  $1/3$  стороны белого квадрата. На рисунке показаны четыре поколения предфракталов. Размерность подобия  $D=\ln 8/\ln 3=1,89\dots$

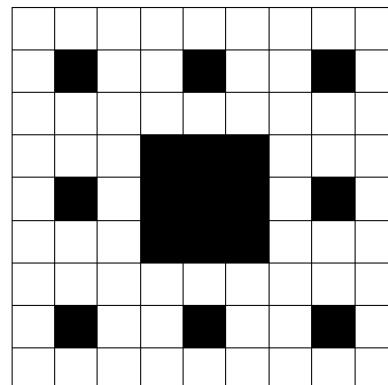
$n=0$



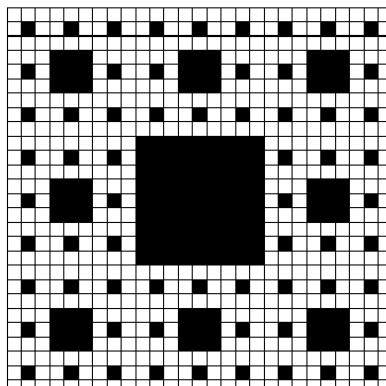
$n=1$



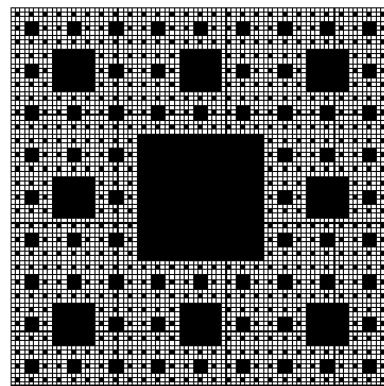
$n=2$



$n=3$

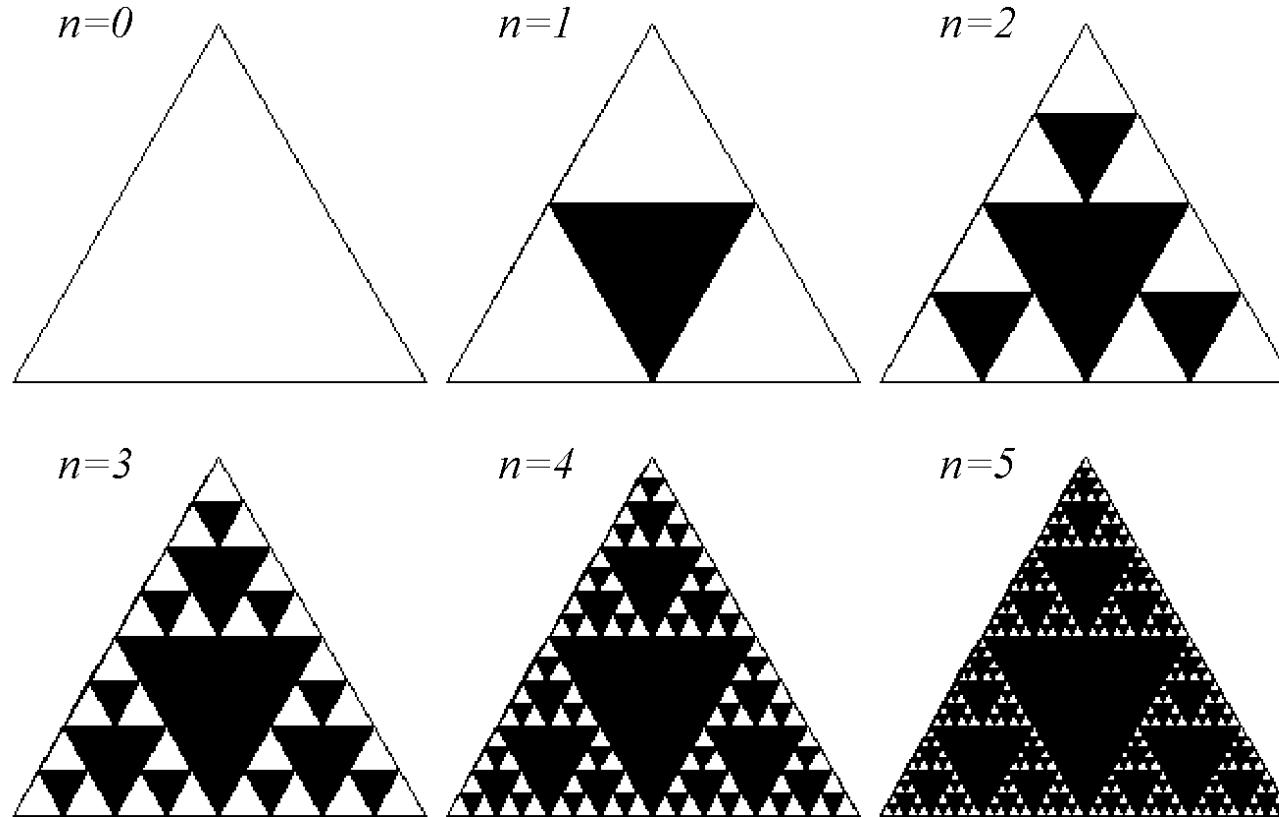


$n=4$



**Вацлав Серпинский** (1882-1969) –польский математик. Основные труды посвящены теории множеств. Теории чисел, топологии

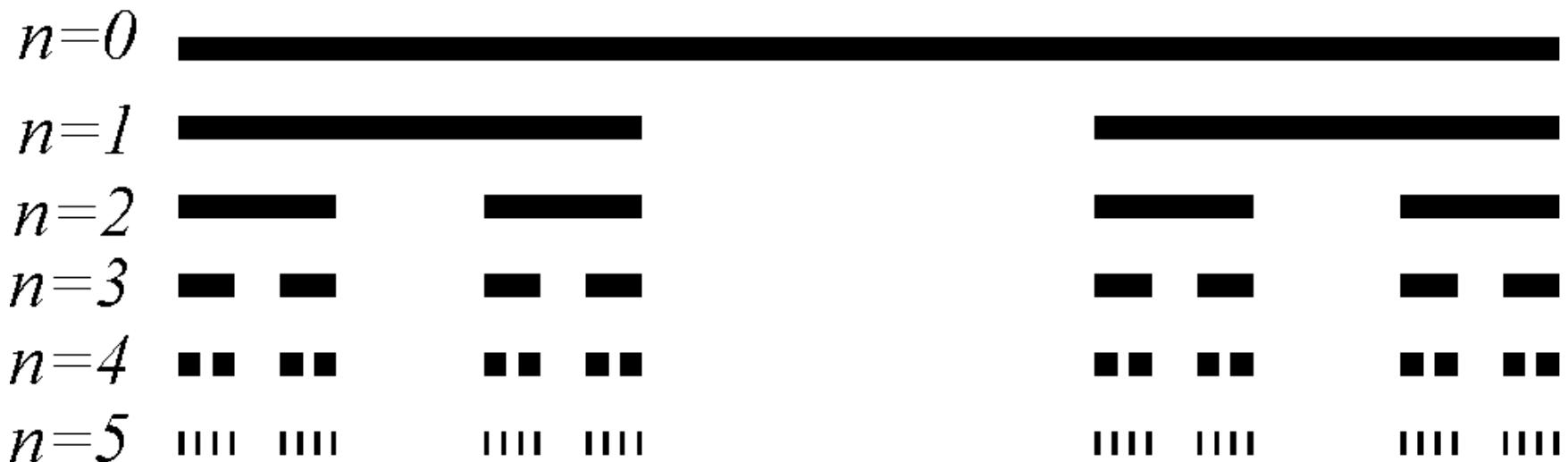
Построение треугольной салфетки Серпинского. Начальный элемент – треугольник со всеми внутренними точками. Образующий элемент исключает из него центральный треугольник. На рисунке показаны пять поколений предфракталов. Фрактальное множество получается в пределе при бесконечно большом числе поколений и имеет фрактальную размерность  $D=\ln 3/\ln 2=1,58\dots$



Канторово множество названо в честь великого математика

Георга Кантора (1845-1918), открывшего его в 1883 г.

Построение кривой Коха можно рассматривать как процесс добавления к отрезку все более мелких деталей. Построение канторова множества сводится к выбрасыванию из первоначального отрезка все более мелких отрезков



# Хаотическое поведение демонстрируют

- Системы трех и более автономных нелинейных дифференциальных уравнений
- Системы двух **неавтономных** дифференциальных уравнений (периодическое воздействие на колебательную систему)
- Дискретные системы
- Системы с запаздыванием

# Glycolysis with periodic substrate input flux

$$\frac{d[F6P]}{dt} = \frac{d[PEP]}{dt} + \frac{d[ATP]}{dt}$$

$$= \bar{V}_{in} + A \sin \omega_e t - V_{PDK}$$

$$\frac{d[ADP]}{dt} = - \frac{d[ATP]}{dt} = V_{PDK} - V_{PK}$$

F6P – fructose 6 phosphate

PEP – phosphoenolpyruvate

$\bar{V}_{in}$  - the mean input flux

$\omega_e$  - frequency of the periodic input flux

$$A = \bar{V}_{in}$$

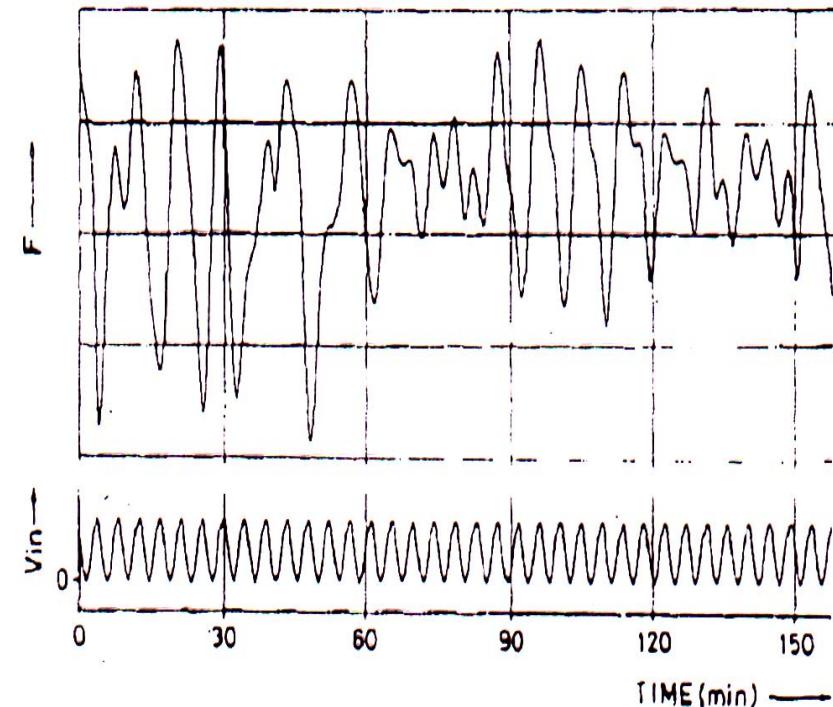


Fig. 2. Measured NADH fluorescence (upper curve) of yeast extract under sinusoidal glucose input flux (lower curve).

# Подавление хаоса и управление хаосом

А.Ю.Лоскутов,  
А.С.Михайлов.  
Основы теории  
сложных систем

ИКИ-РХД, 2007

