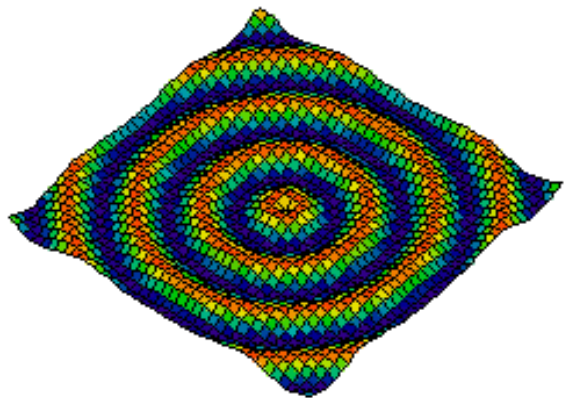




Распределенные системы

2



**Устойчивость гомогенного
(однородного по
пространству)**

**стационарного
(постоянного во времени)
состояния**

Устойчивость гомогенного стационарного состояния для одного уравнения в одномерном реакторе

(трубке длины l)

$$\frac{\partial C}{\partial t} = f(C) + D \frac{\partial^2 C}{\partial r^2}.$$

Краевые условия –
непроницаемость границ

$$\frac{\partial C}{\partial t}(t, 0) = \frac{\partial C}{\partial r}(t, l) = 0.$$

Гомогенное стационарное состояние:

$$f(C_0) = 0$$

Устойчивость – зададим малые отклонения

$$\frac{\partial C}{\partial t} = f(C) + D \frac{\partial^2 C}{\partial r^2}.$$

Зададим системе некоторое возмущение $\delta(r)$, т.е. выберем в качестве начальной функции в этой задаче функцию, близкую к C_0 :

$$C(0, r) = C_0 + \delta(r); \quad |\delta(r)| \ll 1 \quad \text{Малое отклонение}$$

Пусть $C_\delta(t, r)$ – решение задачи с такой начальной функцией.

При малых $\delta(r)$ функция $C_\delta(t, r)$ может быть представлена в виде:

$$C_\delta(t, r) \approx C_0(r) + \delta(t, r).$$

Вблизи $C_0(r)$ нелинейную функцию $f(C)$ можно приблизить линейной функцией, используя первый член разложения по C в ряду Тейлора:

$$f(C) = f(C_0) + f'_c(C_0)(C - C_0)$$

$$C - C_0 = \delta(t, r)$$

Уравнение для отклонения

$$\frac{\partial C}{\partial t} = f(C) + D \frac{\partial^2 C}{\partial r^2}.$$

$$|\delta(r)| \ll 1$$

$$C_\delta(t, r) \approx C_0 + \delta(t, r).$$

$$\frac{\partial C_0}{\partial t} + \frac{\partial \delta(t, r)}{\partial t} = f(C_0) + f'_c(C_0)\delta(t, r) + D \frac{\partial^2 C_0}{\partial r^2} + D \frac{\partial^2 \delta(t, r)}{\partial r^2}$$

Учитывая, что C_0 – гомогенное стационарное состояние,
остается уравнение для отклонений

$$\frac{\partial \delta(t, r)}{\partial t} = \frac{\partial^2 \delta(t, r)}{\partial r^2} + f'_c(C_0)\delta(t, r) \quad \text{Здесь } D=1$$

с начальным условием $\delta(0, r) = \delta(r)$ и краевыми условиями:

$$\frac{\partial \delta(t, 0)}{\partial r} = \frac{\partial \delta(t, l)}{\partial r} = 0$$

Решение линеаризованной задачи

$$\frac{\partial \delta(t, r)}{\partial t} = \frac{\partial^2 \delta(t, r)}{\partial r^2} + f'_c(C_0) \delta(t, r)$$

$$f'_c(C_0) = A = \text{const}$$

$$\frac{\partial \delta(t, r)}{\partial t} = \frac{\partial^2 \delta(t, r)}{\partial r^2} + A \cdot \delta(t, r)$$

Решение ищем в виде

$$\delta(t, r) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(t) \cos \frac{k\pi r}{l}$$

Для каждого k получим уравнение:

$$\frac{\partial a_k(t)}{\partial t} \cos \frac{k\pi r}{l} = -\frac{k^2 \pi^2}{l^2} a_k(t) \cos \frac{k\pi r}{l} + A a_k(t) \cos \frac{k\pi r}{l}$$

Уравнение для отклонений во времени

$$\frac{\partial a_k(t)}{\partial t} = \left(-\frac{k^2 \pi^2}{l^2} + A \right) a_k(t) \quad a_k(0) = 1$$

$$a_k(t) = \exp \left\{ \left(-\frac{k^2 \pi^2}{l^2} + A \right) t \right\}$$

Решение
неустойчиво, если

$$\frac{k^2 \pi^2}{l^2} < A = f'(C_0)$$

Нарастают гармоники (моды) для которых

$$k^* < \sqrt{\frac{f'(C_0) l^2}{D \pi^2}}$$

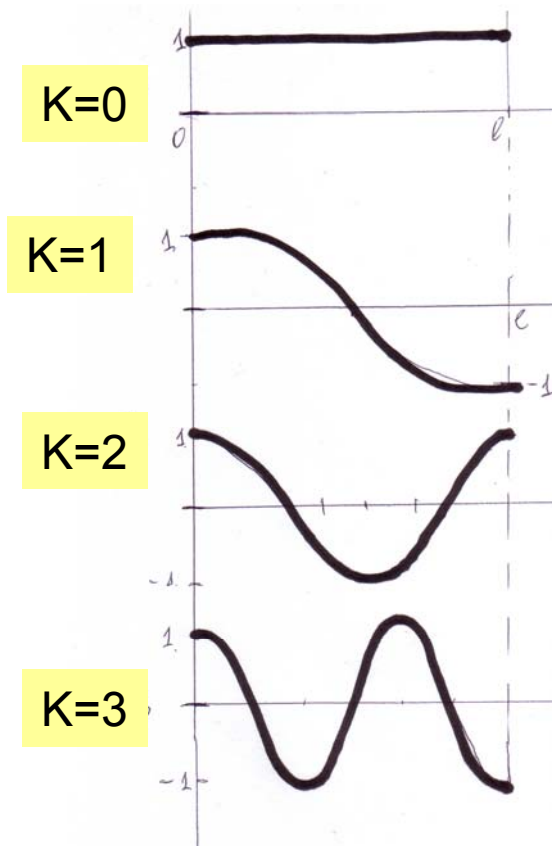
Система усиливает вклады
низших гармоник (мод)

$$\delta(t, r) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(t) \cos \frac{k\pi r}{l}$$

$$k^* < \sqrt{\frac{f'(C_0)l^2}{D\pi^2}}$$

Номер наивысшей незатухающей гармоники тем больше, чем длиннее реактор и тем меньше, чем выше значение коэффициента диффузии.

Незатухающие гармоники, развиваясь, могут приводить систему к установлению пространственно неоднородных диссипативных структур или автоволновых режимов.



Два уравнения реакция-диффузия

Создатель «машины Тьюринга» -
абстрактное вычислительное устройство
(1936)

Разгадал немецкий код Enigma

Член команды, создавшей первый
электронный компьютер в Манчестере
вскоре после 2-й мировой войны

Тест Тьюринга

Могут установиться структуры, когда одно вещество –
близкодействующий активатор,
а другое – дальнедействующий ингибитор.



Алан Тьюринг
1912-1954

$$\frac{\partial x}{\partial t} = P(x, y, r) + D_x \frac{\partial^2 x}{\partial r^2}$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = Q(x, y, r) + D_y \frac{\partial^2 y}{\partial r^2}$$

1952

Два уравнения реакция-диффузия

$$\frac{\partial x}{\partial t} = P(x, y) + D_x \frac{\partial^2 x}{\partial r^2}$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = Q(x, y) + D_y \frac{\partial^2 y}{\partial r^2}$$

Линеаризованные уравнения

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = a\xi + b\eta + D_{\xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial r^2} \quad a = \frac{\partial P(\bar{x}, \bar{y})}{\partial x}, \quad b = \frac{\partial P(\bar{x}, \bar{y})}{\partial y}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = c\xi + d\eta + D_{\eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial r^2} \quad c = \frac{\partial Q(\bar{x}, \bar{y})}{\partial x}, \quad d = \frac{\partial P(\bar{x}, \bar{y})}{\partial y}$$

Решение линейной системы ищем в виде:

$$\xi(t, r) = A e^{pt} e^{ikr},$$

$$\eta(t, r) = B e^{pt} e^{ikr}$$

$$k_n = \frac{\pi n}{l}$$

k – волновое число, «частота» по пространству

Уравнения для амплитуд

$$A(p - a + D_{\xi} k^2) - bB = 0$$

$$cA - (p - d + D_{\eta} k^2)B = 0$$

Дисперсионное уравнение

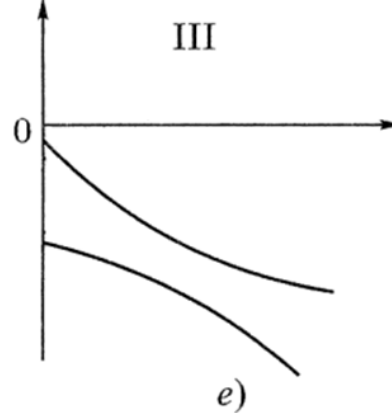
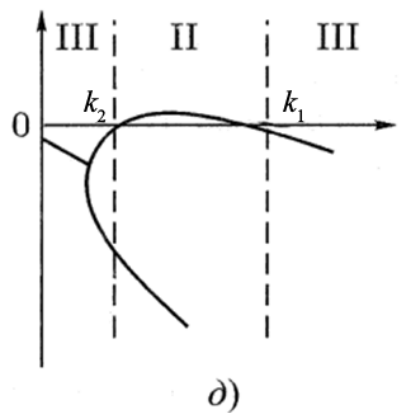
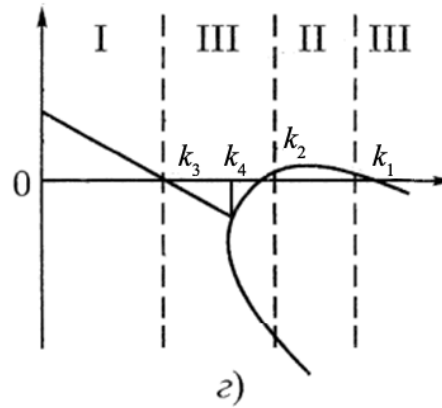
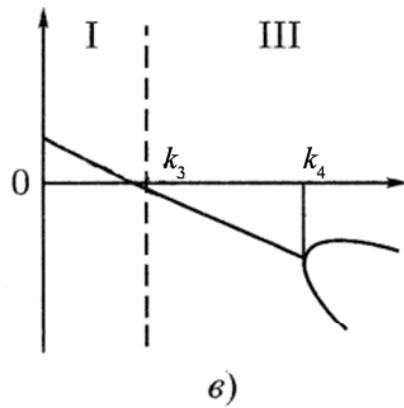
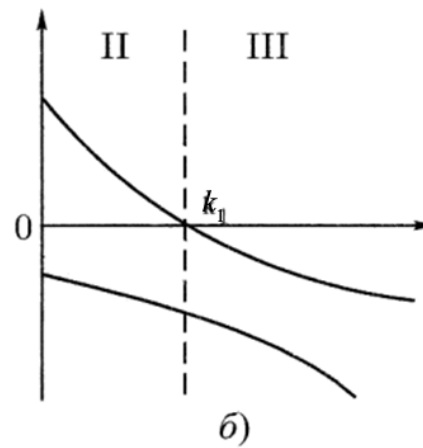
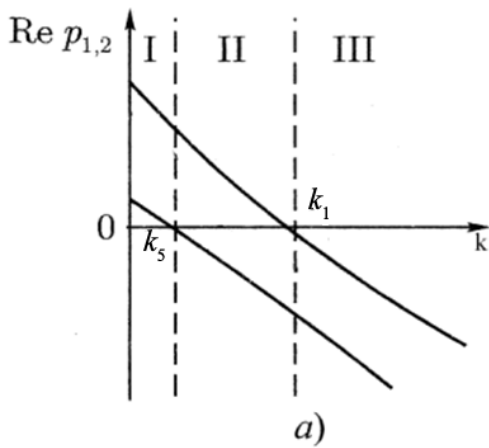
$$(p - a + k^2 D_\xi)(p - d + k^2 D_\eta) - bc = 0$$

$$p_{1,2} = \frac{a + d - (D_\xi - D_\eta)k^2 \pm \sqrt{[a - d - k^2(D_\xi - D_\eta)]^2 + 4bc}}{2}$$

Отсюда ищем p - знак действительной части которого определяет устойчивость

$$\xi(t, r) = A e^{pt} e^{ikr},$$

$$\eta(t, r) = B e^{pt} e^{ikr}$$



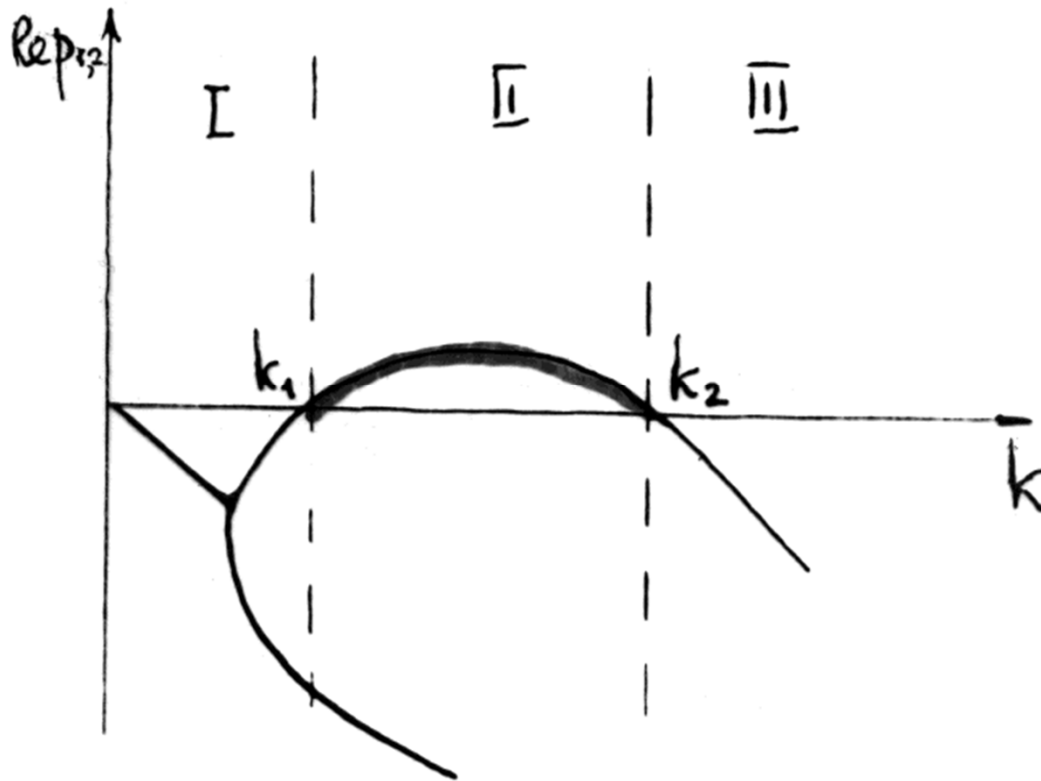
$$\frac{\partial x}{\partial t} = P(x, y, r) + D_x \frac{\partial^2 x}{\partial r^2}$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = Q(x, y, r) + D_y \frac{\partial^2 y}{\partial r^2}$$

Различные типы
зависимости
действительной части
корней дисперсионного
уравнения от волнового
числа k

k_1 – волновое число, при котором система становится устойчивой к данному виду возмущений; k_2 – система теряет устойчивость к данному виду возмущений; k_3 – переход из области колебательной неустойчивости в область устойчивых колебаний; k_4 – переход колебательной системы в бесколебательную; k_5 – переход из области неустойчивого узла в область седловой неустойчивости

Зависимость реальной части собственных чисел от волнового числа для системы двух уравнений с диффузией. Неустойчивость Тьюринга



Пространственно-временные режимы

Turing A.M. The chemical basis of morphogenesis.
Phil.Trans.R.Soc. London B, 1952



Илья Пригожин
1917-2003

$$\frac{\partial x}{\partial t} = P(x, y, r) + D_x \frac{\partial^2 x}{\partial r^2}$$

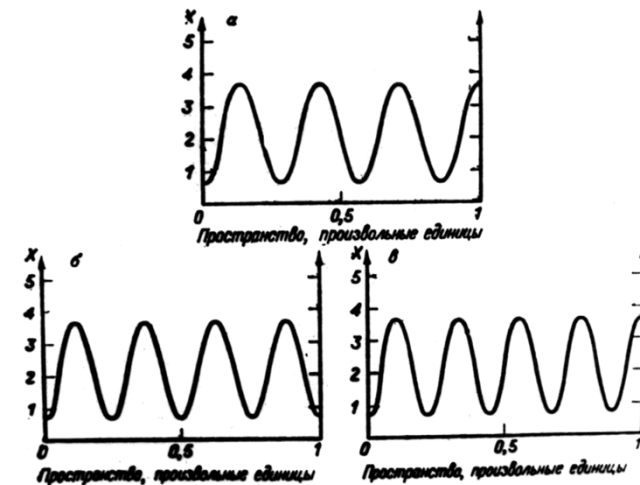
$$\frac{\partial y}{\partial t} = Q(x, y, r) + D_y \frac{\partial^2 y}{\partial r^2}$$

$$\frac{\partial x}{\partial t} = A + X^2 Y - (B + 1)X + D_x \frac{\partial^2 X}{\partial r^2}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = BX - X^2 Y + D_y \frac{\partial^2 Y}{\partial r^2}$$



Алан Тьюринг
1912-1954



Prigogine I, Lefever R. Symmetry breaking instabilities in dissipative systems,
J.Chem. Phys. 48, 1665-1700, 1968

Химические реакции – базовые модели процессов в активных средах

- Брюсселятор
- $A \rightarrow X$ $2X + Y \rightarrow 3X$
- $B + X \rightarrow Y + C$ $X \rightarrow R$

Г.Николис, И.Пригожин. Самоорганизация в неравновесных системах. М., Мир 1979

G.Nicolis, I.Prigogine

Self-Organization in non-equilibrium systems.

From dissipative structures to Order through fluctuations. 1977

Система уравнений «брюсселятор»

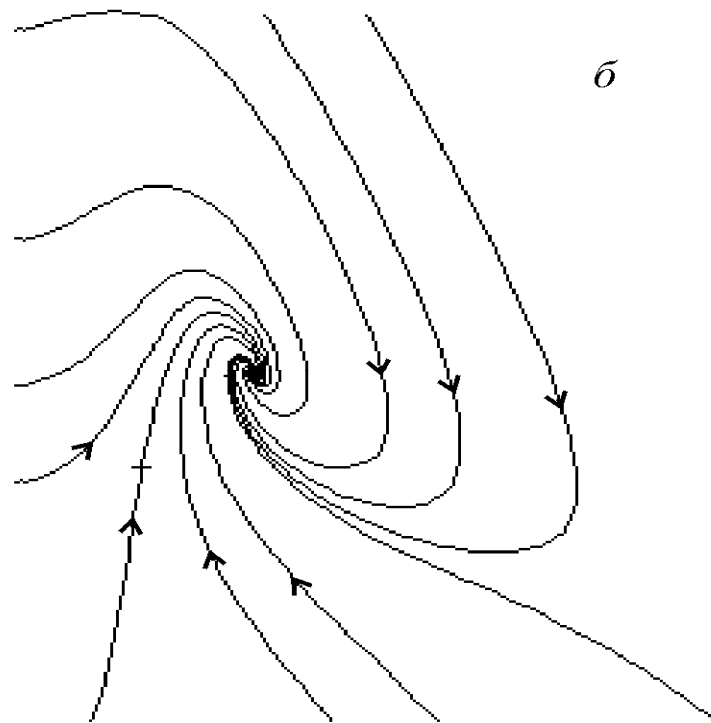
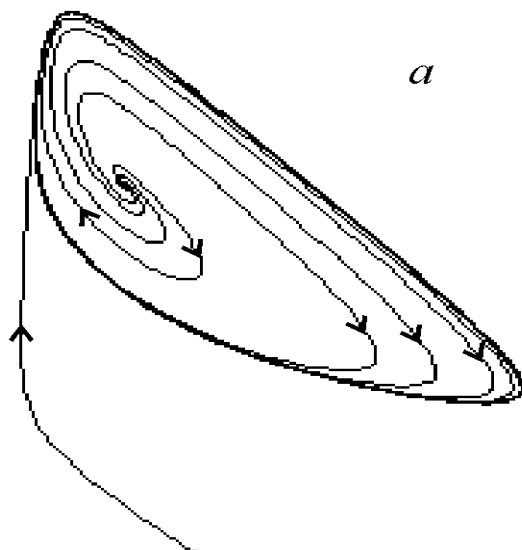
Если конечные продукты C и R удаляются из реакционного пространства, а субстрат A находится в избытке, $k_{-1} = k_{-3} = k_{-4} = 0$. Пусть также $k_{-2} = 0$. Значения остальных констант положим равными единице.

$$\frac{dx}{dt} = A + X^2 Y - (B + 1)X$$

$$\frac{dy}{dt} = BX - X^2 Y.$$

$$\bar{X} = A, \quad \bar{Y} = \frac{B}{A}.$$

Классические модели. Брюсселятор.



Фазовый портрет системы брюсселятор при $V > 1 + A$ (*a*) и $V < 1 + A^2$ (*б*).

Диссипативные структуры в «распределенном брюсселяторе»

$$\frac{\partial x}{\partial t} = A + X^2 Y - (B + 1)X + D_x \frac{\partial^2 X}{\partial r^2}$$

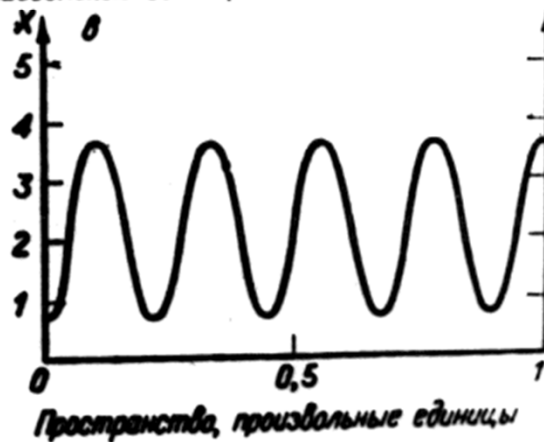
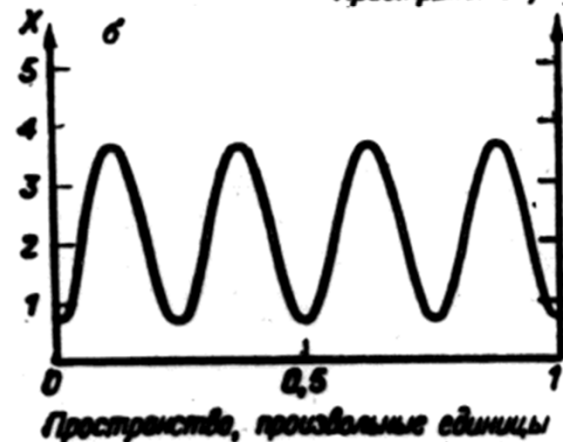
$$\frac{\partial Y}{\partial t} = BX - X^2 Y + D_y \frac{\partial^2 Y}{\partial r^2}$$

X – активатор,

Y – ингибитор

Условие возникновения
структур:

$$B \geq 1, \quad D_x \leq \frac{D_y (1 - \sqrt{B})^2}{A^2}$$



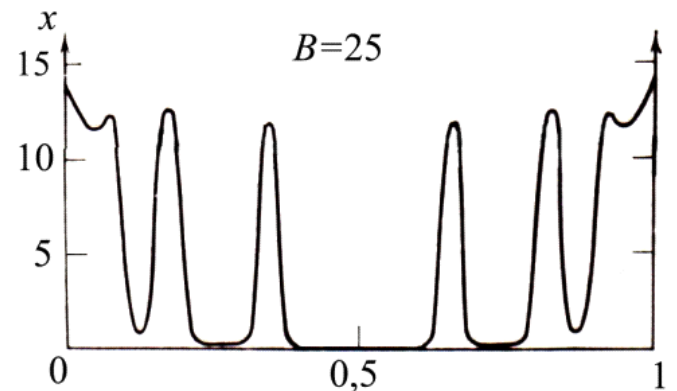
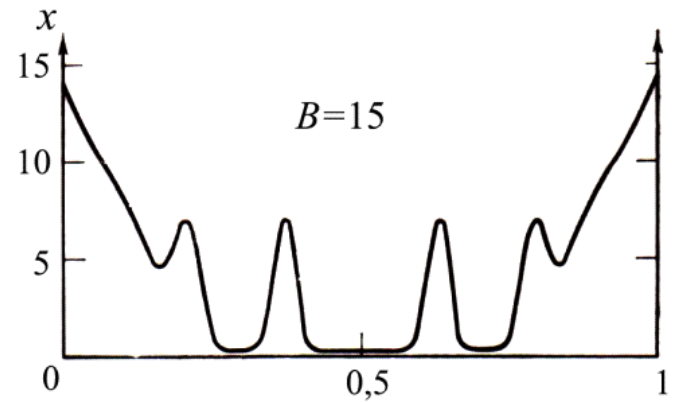
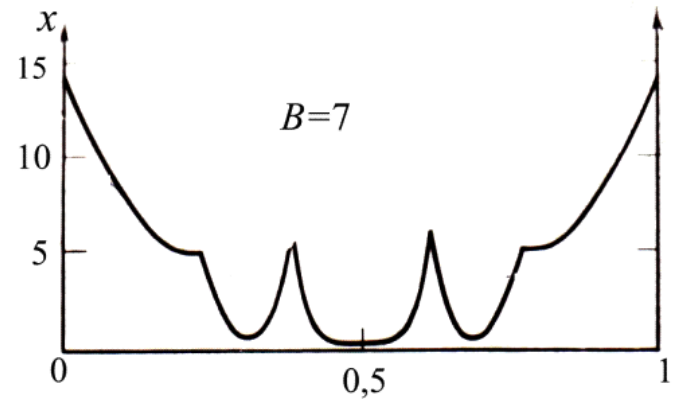
Вещество B равномерно
распределено по объему, а
концентрация вещества A
поддерживается постоянной на
границе,

$$\frac{\partial X}{\partial t} = A + X^2 Y - (B + 1)X + D_x \frac{\partial^2 X}{\partial r^2},$$

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = BX - X^2 Y + D_y \frac{\partial^2 Y}{\partial r^2},$$

$$\frac{\partial A}{\partial t} = -A + D_A \frac{\partial^2 A}{\partial r^2}, \quad (0 \leq r \leq l)$$

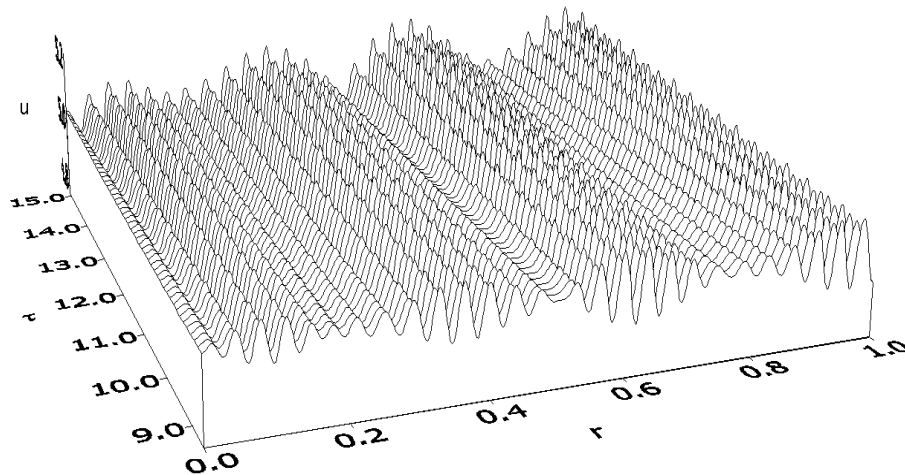
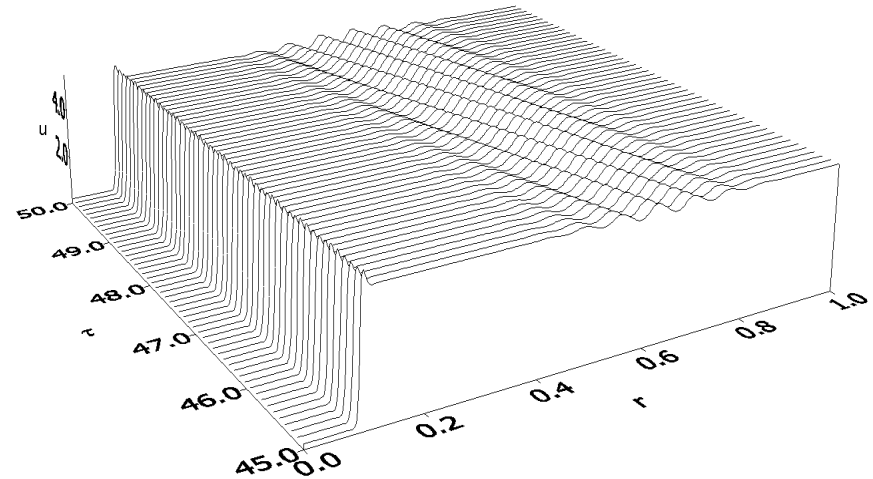
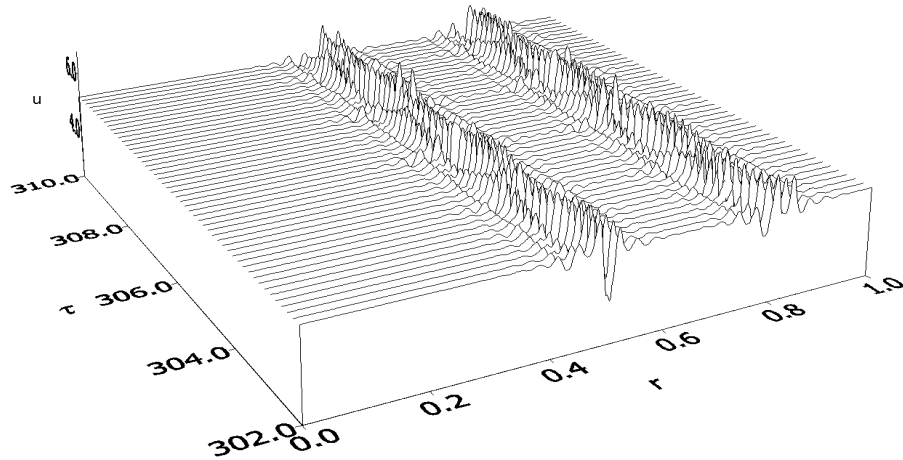
$$A(0) = A(l) = \bar{A}$$



Параметры системы: $DA = 0.026$, $Dx = 1.052 \cdot 10^{-3}$, $Dy = 5.26 \cdot 10^{-3}$, $l = 1$, (а) – $B = 7$; (б) – $B = 12$;
(в) – $B = 25$

Пространственно-распределенный брюсселятор с заряженными компонентами.

А.И.Лобанов, Т.Ю.Плюснина, Т.К.Старожилова, Г.Ю.Ризниченко, А.Б.Рубин.
Влияние электрического поля на пространственно-временные структуры в системе «Реакция-диффузия». Биофизика 2000



$$\frac{\partial c_1}{\partial \tau} = D_1 \frac{\partial^2 c_1}{\partial r^2} + B_1 \frac{\partial c_1}{\partial r} \frac{\partial \psi}{\partial r} - B_1 \chi c_1 (c_1 - z \gamma c_2) + f(c_1, c_2)$$

$$\frac{\partial c_2}{\partial \tau} = D_2 \frac{\partial^2 c_2}{\partial r^2} - B_2 \frac{\partial c_2}{\partial r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + B_2 \chi c_2 (c_1 - z \gamma c_2) + g(c_1, c_2)$$

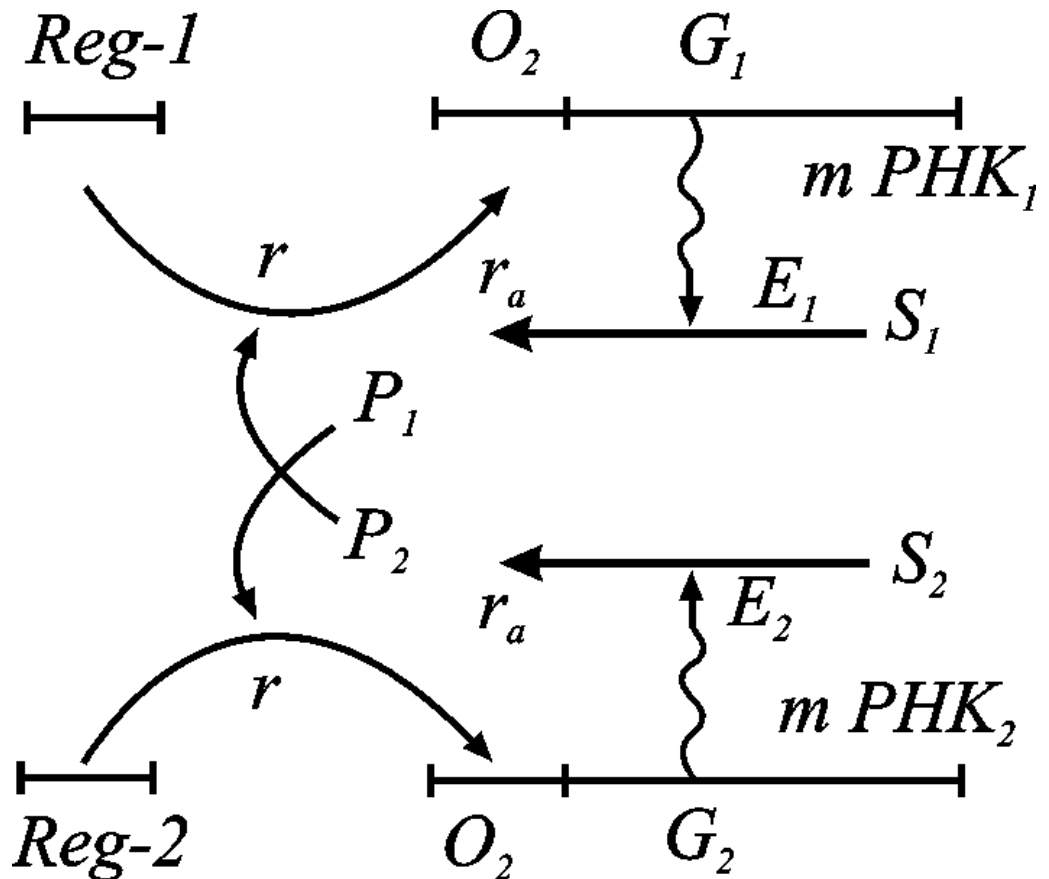
$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} = -\chi (c_1 - z \gamma c_2)$$

Схема синтеза двух ферментов

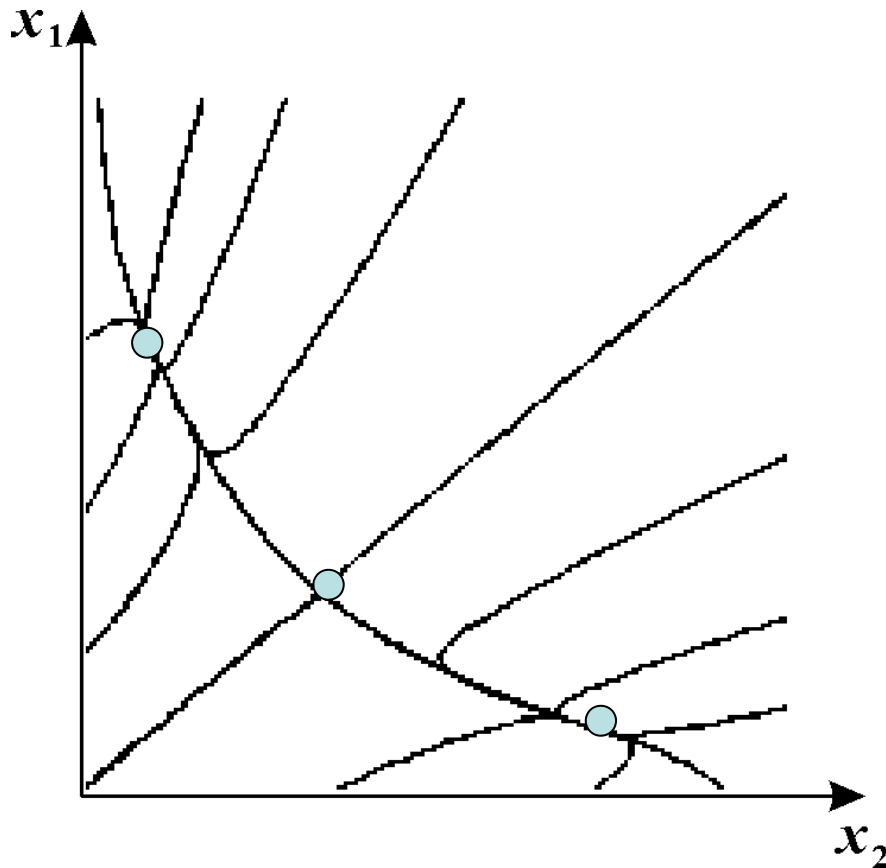
Жакоба и Моно. Генетический триггер

$$\frac{dP_1}{dt} = \frac{A_1}{B_1 + P_2^m} - q_1 P_1,$$

$$\frac{dP_2}{dt} = \frac{A_2}{B_2 + P_1^m} - q_2 P_2.$$



Фазовый портрет триггерной системы Жакоба и Моно



$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{L_1}{1 + x_2^m} - x_1 ,$$

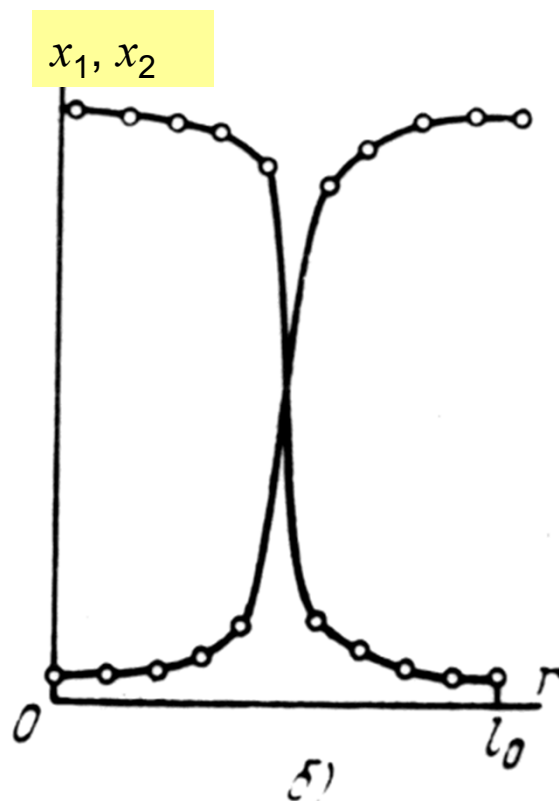
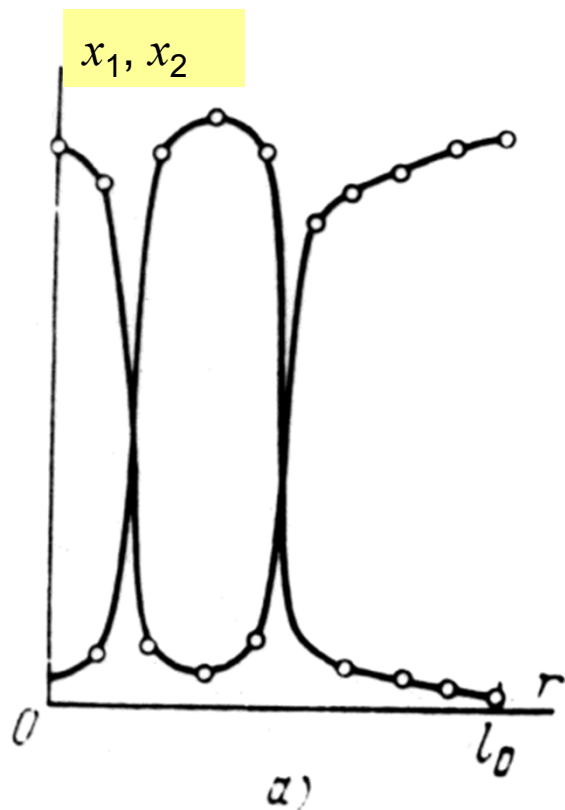
$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{L_2}{1 + x_1^m} - x_2$$

$$L_1 = L_2 = 3; \quad m = 2$$

Структуры в распределенном триггере Жакоба и Моно Модель Д.С.Чернавского и др.

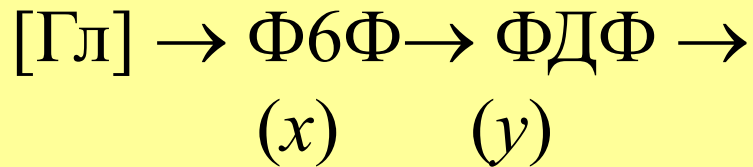
$$\frac{\partial x_1}{\partial t} = \frac{L_1}{1 + x_2^m} - x_1 + D_x \frac{\partial^2 x}{\partial r^2},$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial t} = \frac{L_2}{1 + x_1^m} - x_2 + D_y \frac{\partial^2 y}{\partial r^2}$$



Колебания в гликолизе

Активация



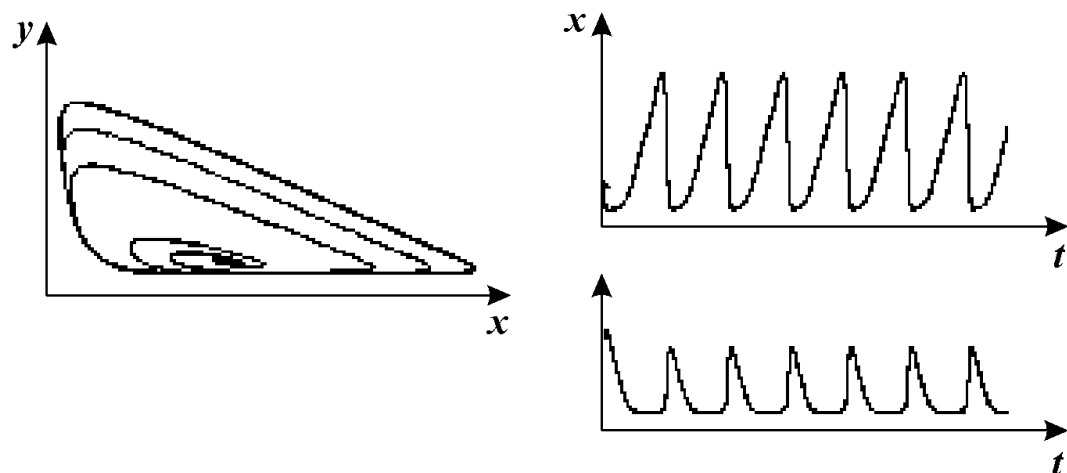
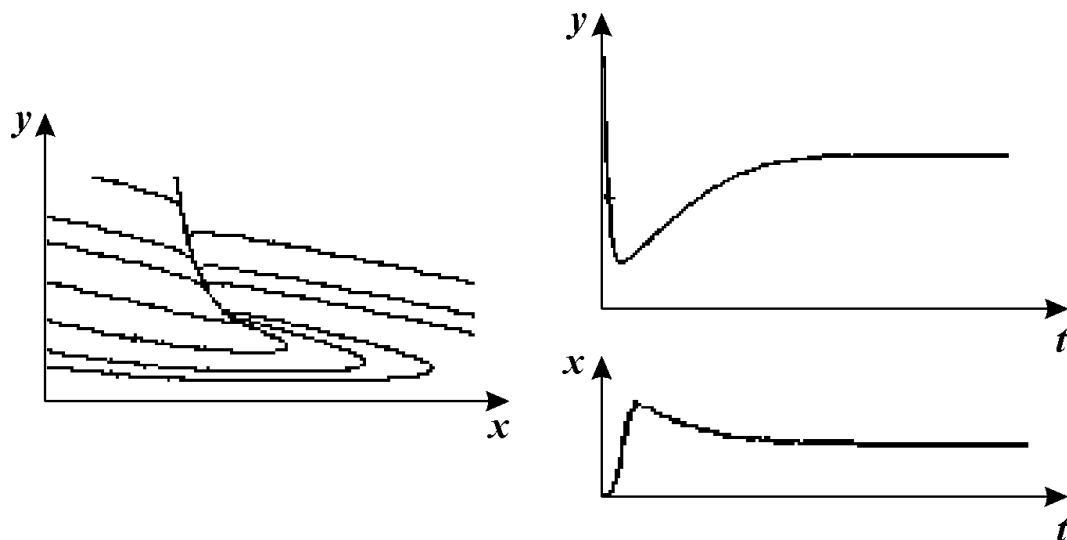
$$\frac{dx}{dt} = k - \chi \frac{x}{(K_{mx} + x)} \frac{y}{(K_{my} + y)}$$

$$\frac{dy}{dt} = \chi \frac{x}{(K_{mx} + x)} \frac{y}{(K_{my} + y)} - q \frac{y}{(K'_{my} + y)}$$

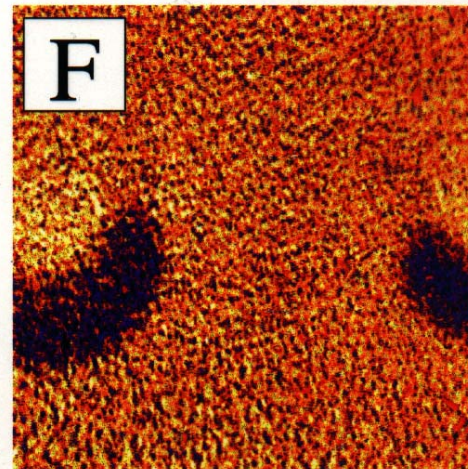
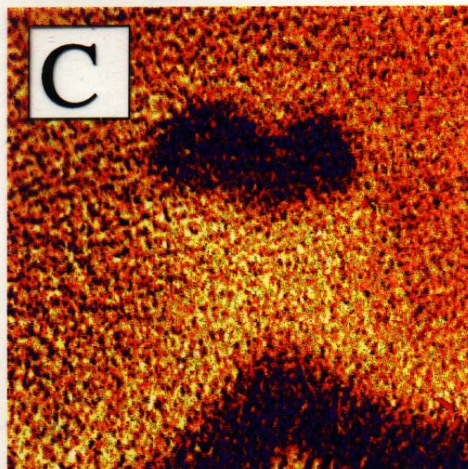
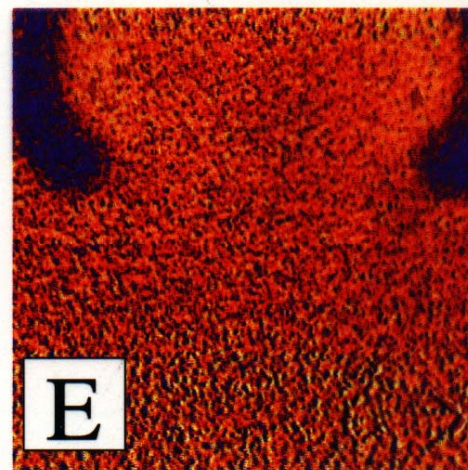
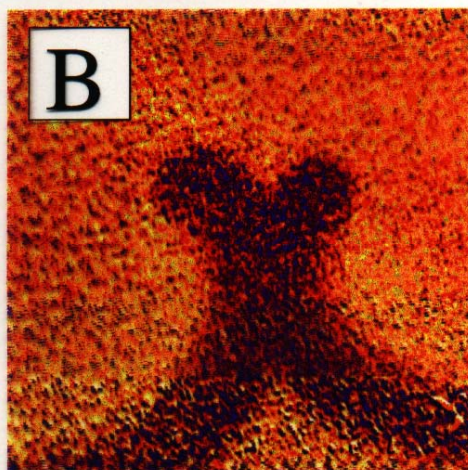
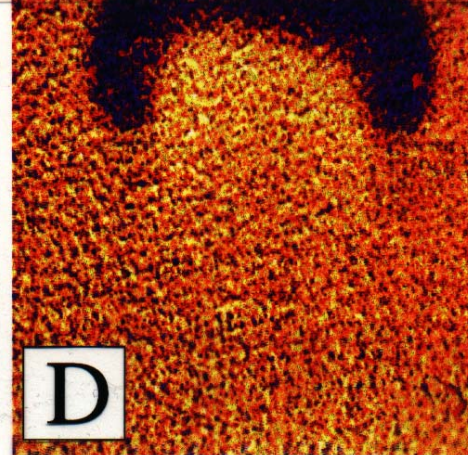
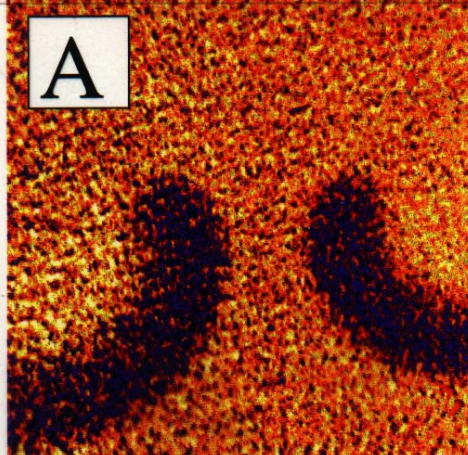
Фазовые портреты и кинетика

$$\frac{dx}{dt} = 1 - xy,$$

$$\frac{dy}{dt} = \alpha y \left(x - \frac{1+r}{1+ry} \right),$$



Модель гликолиза (8.10).
 Кинетика изменений
 концентраций
 фруктозо-6-фосфата (x) и
 фруктозодифосфата (y)
 (справа) и фазовый
 портрет системы (слева)
 при разных значениях
 параметров системы,
 α - бесколебательный
 процесс (узел на фазовой
 плоскости), $\alpha = 0.25$; $r = 1$.
 α - колебания с
 постоянной амплитудой и
 фазой (предельный цикл
 на фазовой плоскости),
 $\alpha = 8$; $r = 0.5$.



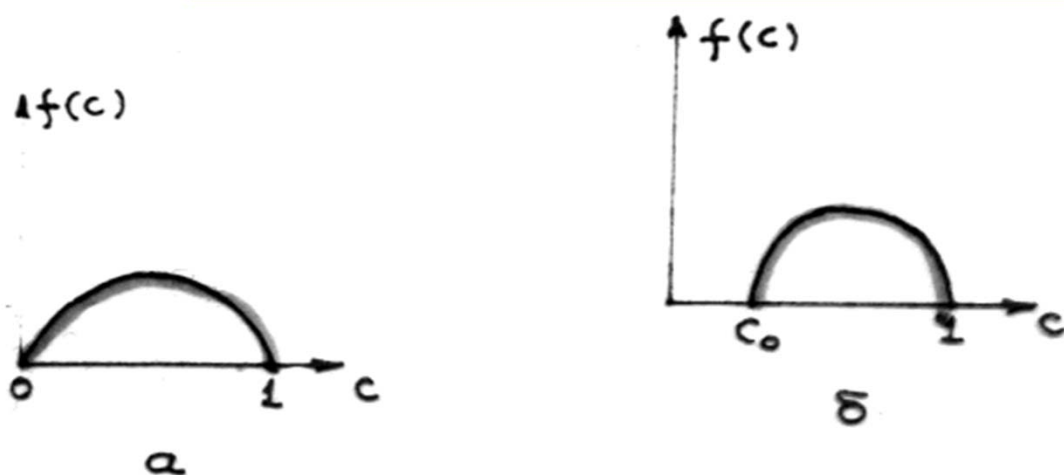
Структуры в
гомогенате
дрожжей
Распределенная
система гликолиз.

A-F -
последовательные
моменты времени

$$\frac{\partial x}{\partial t} = 1 - xy + D_x \frac{\partial^2 x}{\partial r^2},$$

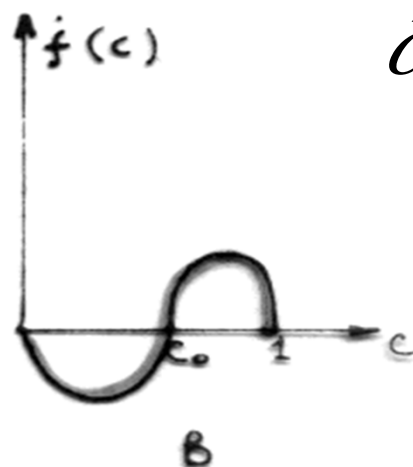
$$\frac{\partial y}{\partial t} = \alpha y \left(x - \frac{1+r}{1+ry} \right) + D_y \frac{\partial^2 y}{\partial r^2},$$

Модель распространения волны Петровского-Колмогорова- Пискунова



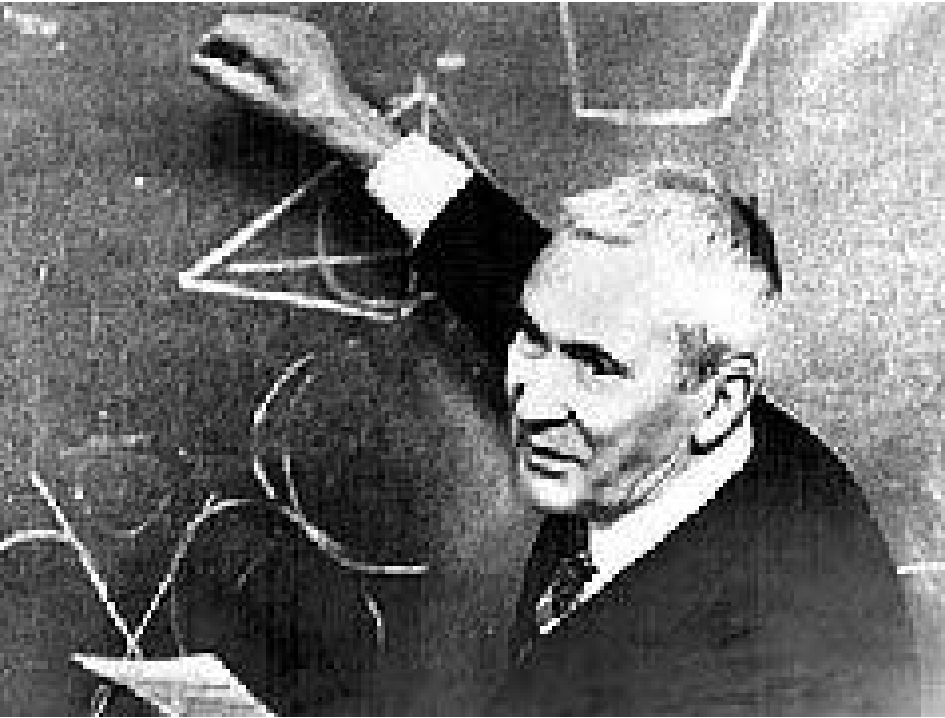
Функции правой
части

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial r^2} + f(C)$$



Модель распространения
доминирующего вида

Андрей Николаевич Колмогоров

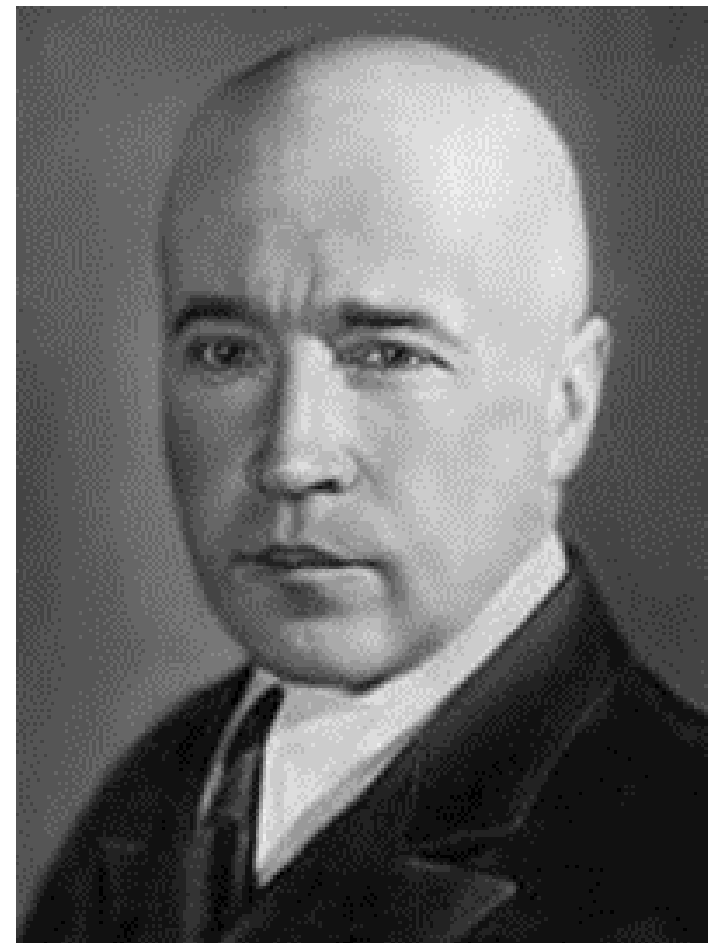


Человечество всегда мне представлялось в виде множества блуждающих в тумане огоньков, которые лишь смутно чувствуют сияние, рассеиваемое всеми другими, но связаны сетью ясных огненных нитей, каждый в одном, двух, трех... направлениях. И возникновение таких прорывов через туман к другому огоньку вполне разумно называть "ЧУДОМ"

Андрей Николаевич Колмогоров занимает уникальное место в современной математике, и в мировой науке в целом. По широте и разнообразию своих научных занятий он напоминает классиков естествознания прошлых веков

Ива́н Гео́ргиевич Петро́вский

1901-1973



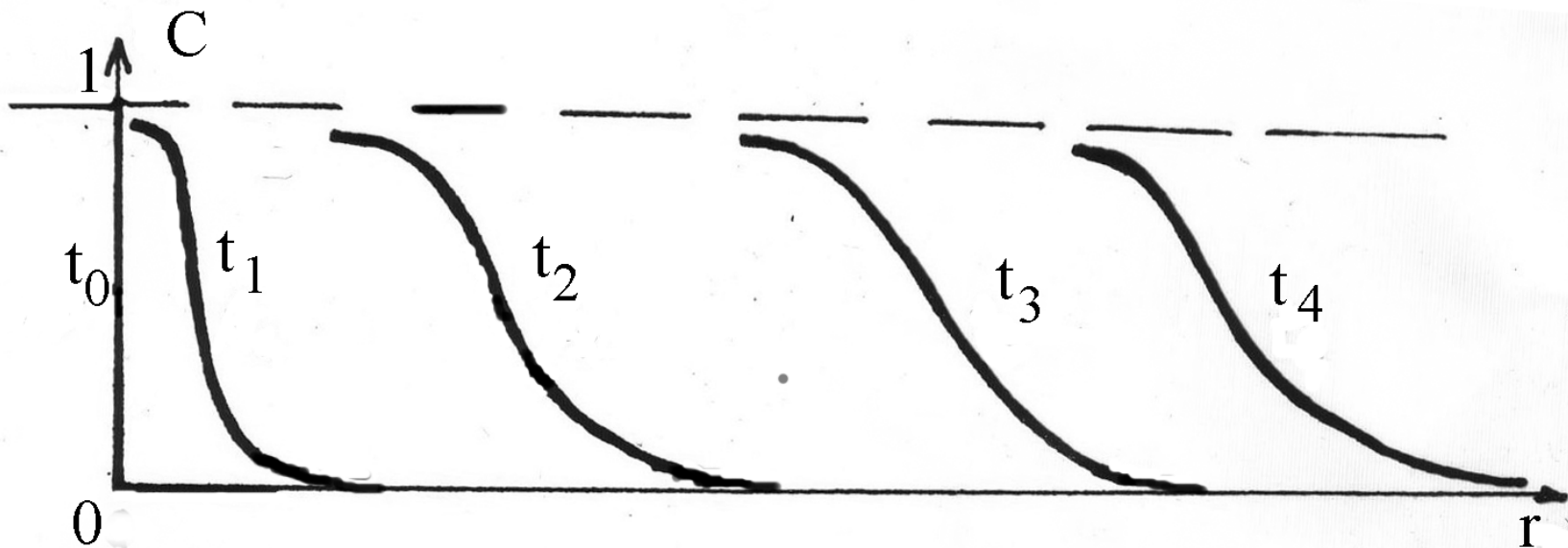
выдающийся советский математик и деятель отечественного образования. С 1951 по 1973 гг. — ректор Московского государственного университета им. М.В.Ломоносова

Профиль распространяющейся волны в разные моменты времени в уравнении Петровского-Колмогорова-Пискунова

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial r^2} + f(C)$$

Предельная скорость
распространения
фронта волны

$$\lambda_0 = 2\sqrt{D \cdot f'(0)}$$



АВТОВОЛНОВОЕ решение

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial r^2} + f(C)$$

- Предельная форма кривой плотности дается решением уравнения:

$$D \frac{d^2 V}{dz^2} + \lambda_0 \frac{dV}{dz} + f(V) = 0,$$

- обращаясь в нуль при $Z = +\infty$ и в единицу при $Z = -\infty$.
- Такое решение $V(Z)$ всегда существует и единственно, с точностью до преобразования (A – произвольная постоянная), не меняющего форму кривой.
- Уравнение может быть получено, если искать решение уравнения распространения волны в форме:
- $C(t, r) \approx V(r - \lambda t)$

Амброзия - амброзиевый листоед



Растение до 180-200 см в длину
Распространяется только семенами (даже восковой спелости)



- Амброзия полынолистная (*Ambrosia artemisiifolia*) была завезена в Россию в сороковые годы 20 века во время Великой Отечественной Войны вместе с американскими продовольственными поставками зерна. «Чужой» для России вид быстро распространился по огромным территориям Европейской части СССР, в Закавказье, Казахстане, Приморском крае. Амброзия заглушает посевы культурных растений, не имеет в Европе и Азии естественных вредителей, не поедается большинством теплокровных животных, пыльца амброзии вызывает массовую аллергию у людей в летнее время.

Распространение амброзиевого листоеда

- Полосатый жук – амброзиевый листоед (*Zygogramma suturalis*), является естественным вредителем амброзии в Америке.

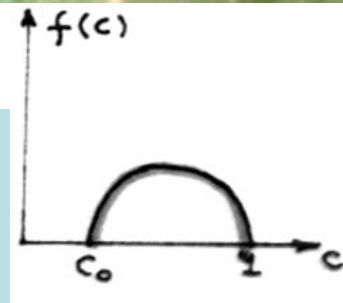
Первый выпуск в 1978 г. в
Ставропольском крае.

В 1983 г. – до 5 тыс. особей на 1 кв.м



Популяционная волна

Начиная с третьего поколения жука границы разрастающейся популяции можно было определить по зонам высокой плотности листоеда. Эти зоны представляли собой неправильной формы круги, причем положение зон высокой плотности в течение сезона оставалось фиксированным и изменялось лишь в следующем сезоне



Начиная с седьмого поколения была зарегистрирована уединенная популяционная волна, движущаяся с постоянной скоростью без изменения формы. В узкой полосе регистрировалась чрезвычайно высокая плотность насекомых – до 5 тыс. на 1 кв. м. В тылу волны амброзия оказывается полностью уничтоженной, движение напоминало распространение степного пожара. Скорость движения волны составляла 3 м/сут. Формирование волны происходило на всей территории ареала вредителя по мере достижения критической численности в местах колонизации.

Модель распространения амброзиевого листоеда

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D\Delta n + \nabla(B\nabla p) + f(n)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -An,$$

Направленное
движение

Отличие от химических систем

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$$

n - численность жуков

$f(n)$ – изменение численности жуков за счет рождения и смертности.

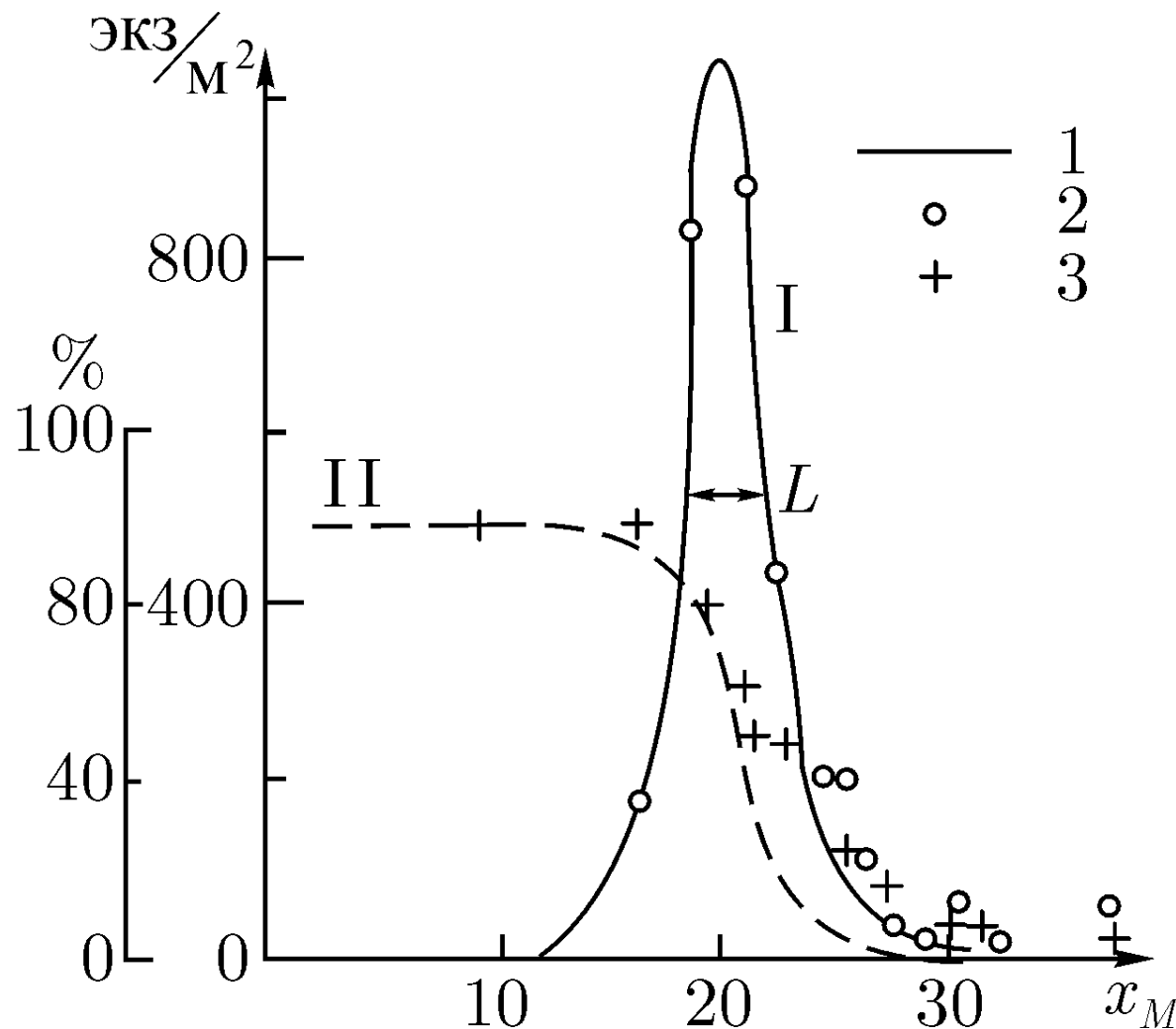
B – коэффициент эффективности поиска пищи, $p(\mathbf{r}, t)$ – плотность амброзии.

A – количество корма, поедаемое одной особью в сутки

Ковалев О.В. и Вечерин В.В. Описание нового волнового процесса в популяциях на примере интродукции и расселения амброзиевого листоеда *Zygogramma suturalis* F. (Coleoptera, Chrysomelidae).

Энтомол. обозрение **65**(1): 21-38, 1986

Популяционная волна амброзиевого листоеда



Волна амброзиевого
листоеда, кривая I, и
волна пораженности
амброзии (%),
кривая II. 1 – расчет
по модели, 2,3 –
данные
экспериментальных
наблюдений

Алексеев В.В., Крышев
И.И., Сазыкина Т.Г.
Физическое и
математическое
моделирование экосистем,
1992