

[www.biophys.msu.ru](http://www.biophys.msu.ru)

# Модели нелинейного мира

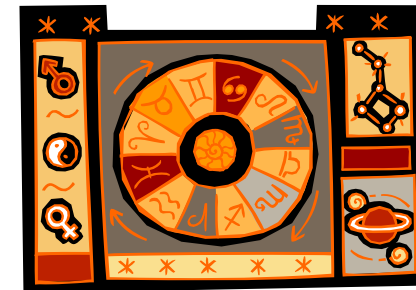
Лекция 3

**Галина Юрьевна Ризниченко**

Каф. биофизики Биологического ф-та Московского  
государственного университета им.  
М.В.Ломоносова, к.119

тел: +7(495)9390289; факс: (495)9391115;

E-mail: [riznich@biophys.msu.ru](mailto:riznich@biophys.msu.ru)

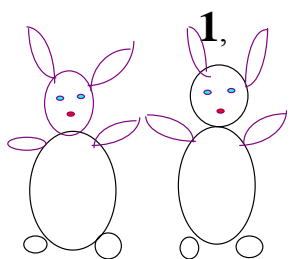


<http://mathbio.professorjournal.ru/mnw>

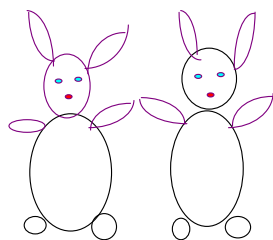
# Типы аттракторов

- *Устойчивая точка покоя*
- *Предельный цикл — режим колебаний с постоянными периодом и амплитудой (начиная с размерности системы 2)*
- *Области с квазистохастическим поведением траекторий в области аттрактора, например, «странный аттрактор» (начиная с размерности 3).*

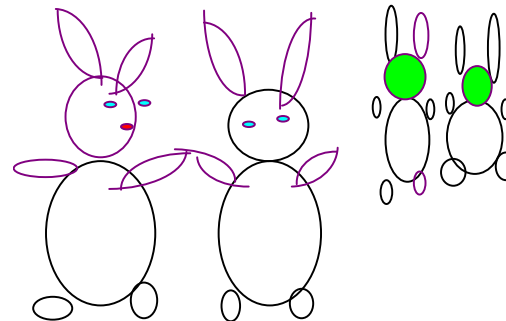
# Популяционная динамика ряд Фибоначчи



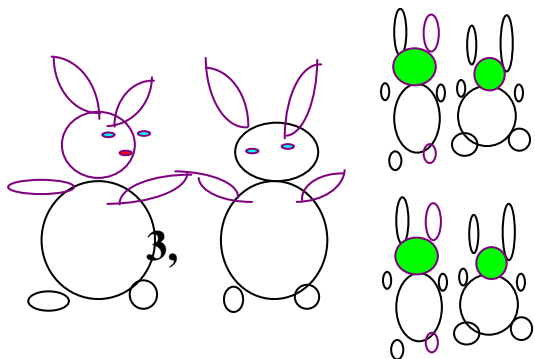
1



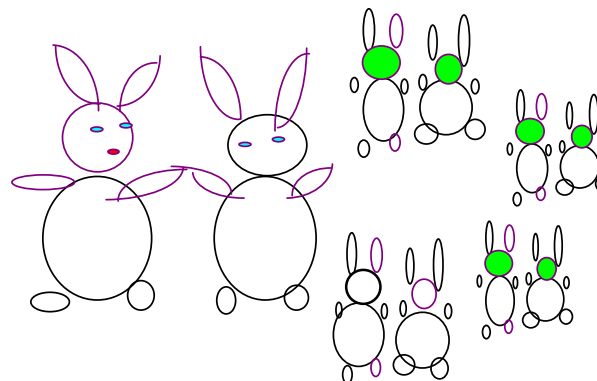
1



2



3



5

Леонардо из Пизы («Трактат о счете», 13 век)

# Непрерывные модели роста популяций

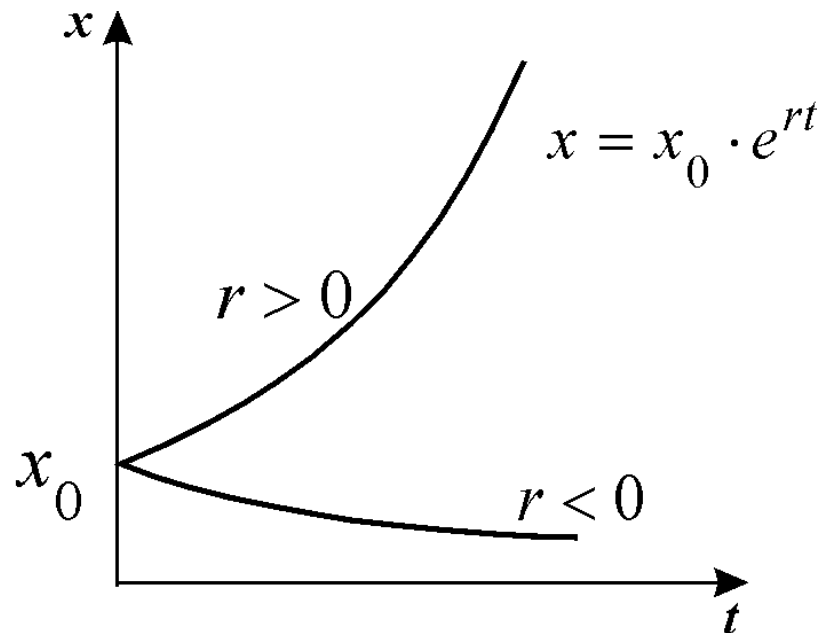
# Модель экспоненциального роста Мальтуса («О росте народонаселения» 1798)



**Тóмас  
Рóберт  
Мáльтус**  
английский  
священник  
демограф и  
экономист  
1766-1834

$$N_{t+1} = qN_t \quad N_{t+1} = q^n N_0$$

$$\frac{dx}{dt} = rx.$$



# Схемы роста в терминах системного анализа

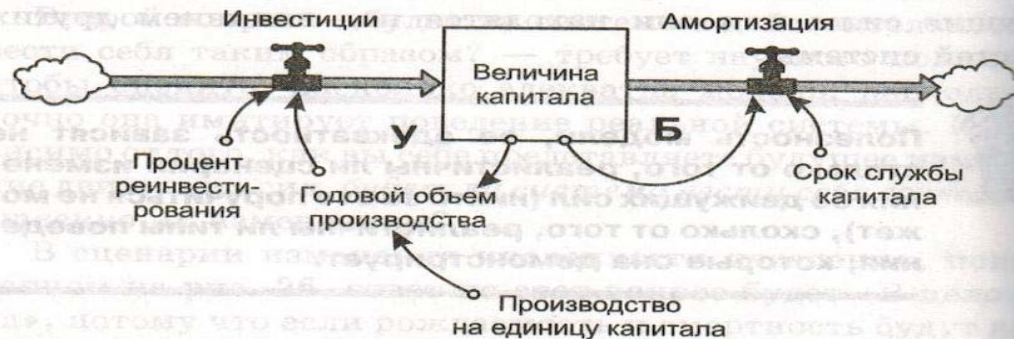
80

Часть I. Системные структуры и поведение



**Рис. 21.** Численность населения зависит от усиливающего цикла, описывающего рождаемость, и балансирующего цикла, описывающего смертность

Чем больше величина физического капитала (оборудование и заводы) и чем выше эффективность производства (объем производства на единицу капитала), тем больше годовой выход продукции



**Рис. 27.** Как и в структуре с численностью населения, экономический капитал зависит от усиливающего цикла, ответственного за рост (инвестиции в виде доли от годового объема производства), и балансирующего цикла, ответственного за снижение капитала (амортизация)

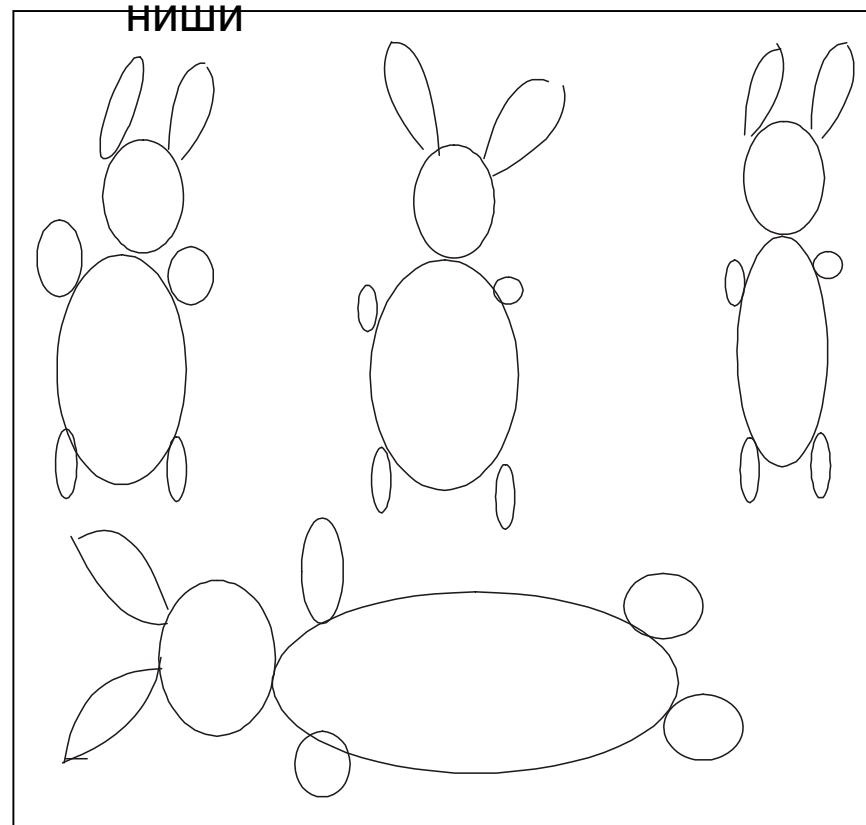
# Уравнение логистического роста (Ферхюльст, 1845)

$$\frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right)$$

$r$  – константа скорости роста

$K$  – емкость экологической

НИШИ



$K$  – системный фактор



P. F. VERHULST.

# Уравнение Ферхюльста

$$\frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right)$$

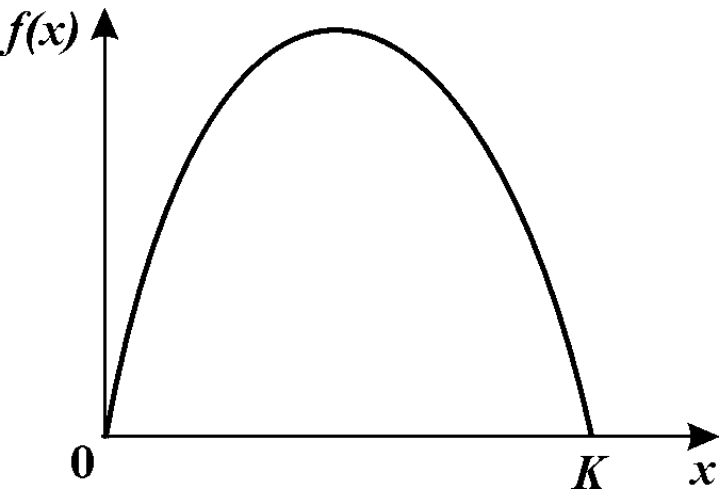
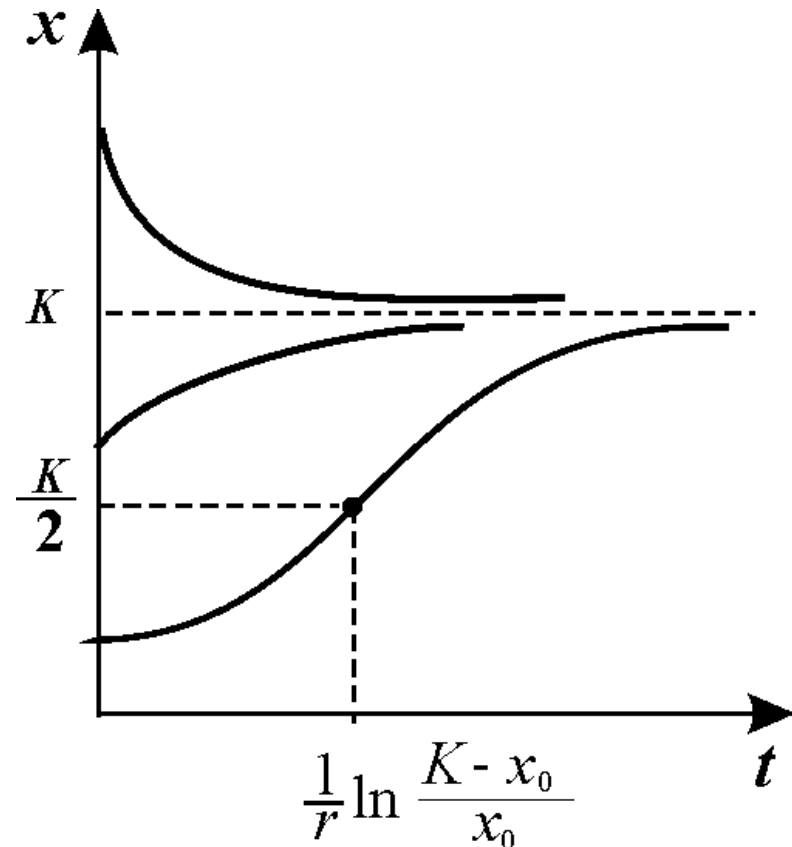


График функции  $f(x)$

Задание математикам и физикам

1. Решить уравнение Ферхюльста  
При заданном  $x_0$ .

2. Найти координаты точки перегиба

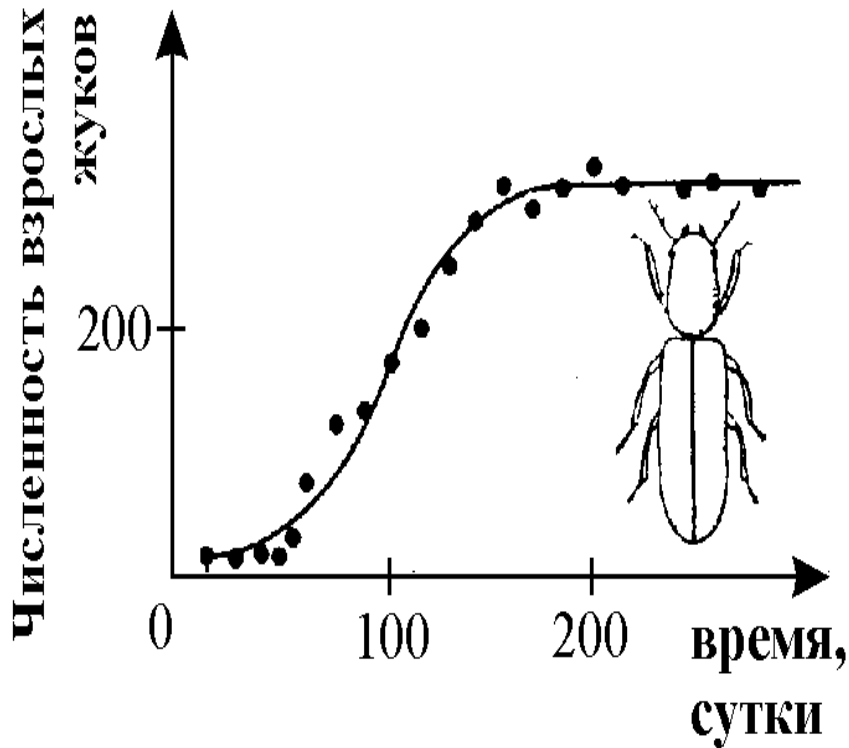


Поведение  $x$  во времени



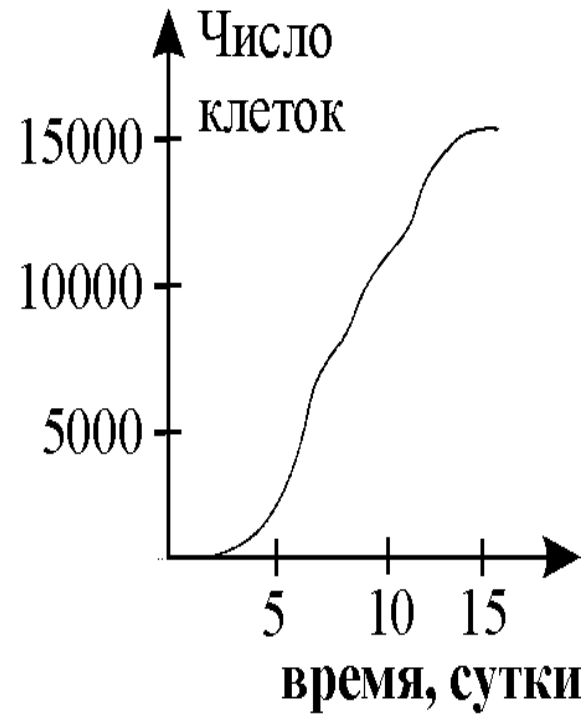
# Ограниченный рост (уравнения Ферхюльста)

$$\frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right)$$



*a*

Жук *Rhizoretha dominica* в 10-граммовой порции пшеничных зерен, пополняемых каждую неделю (Crombie, 1945).

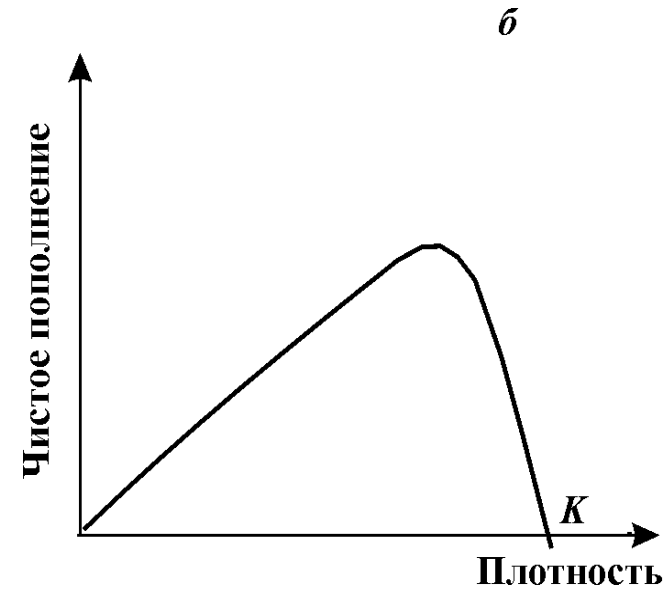
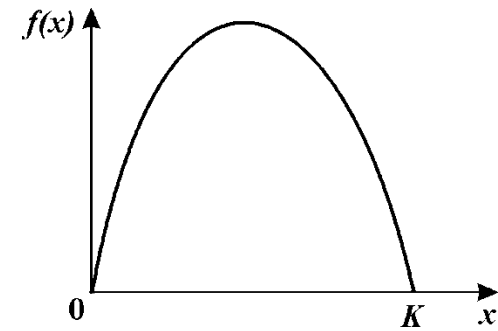
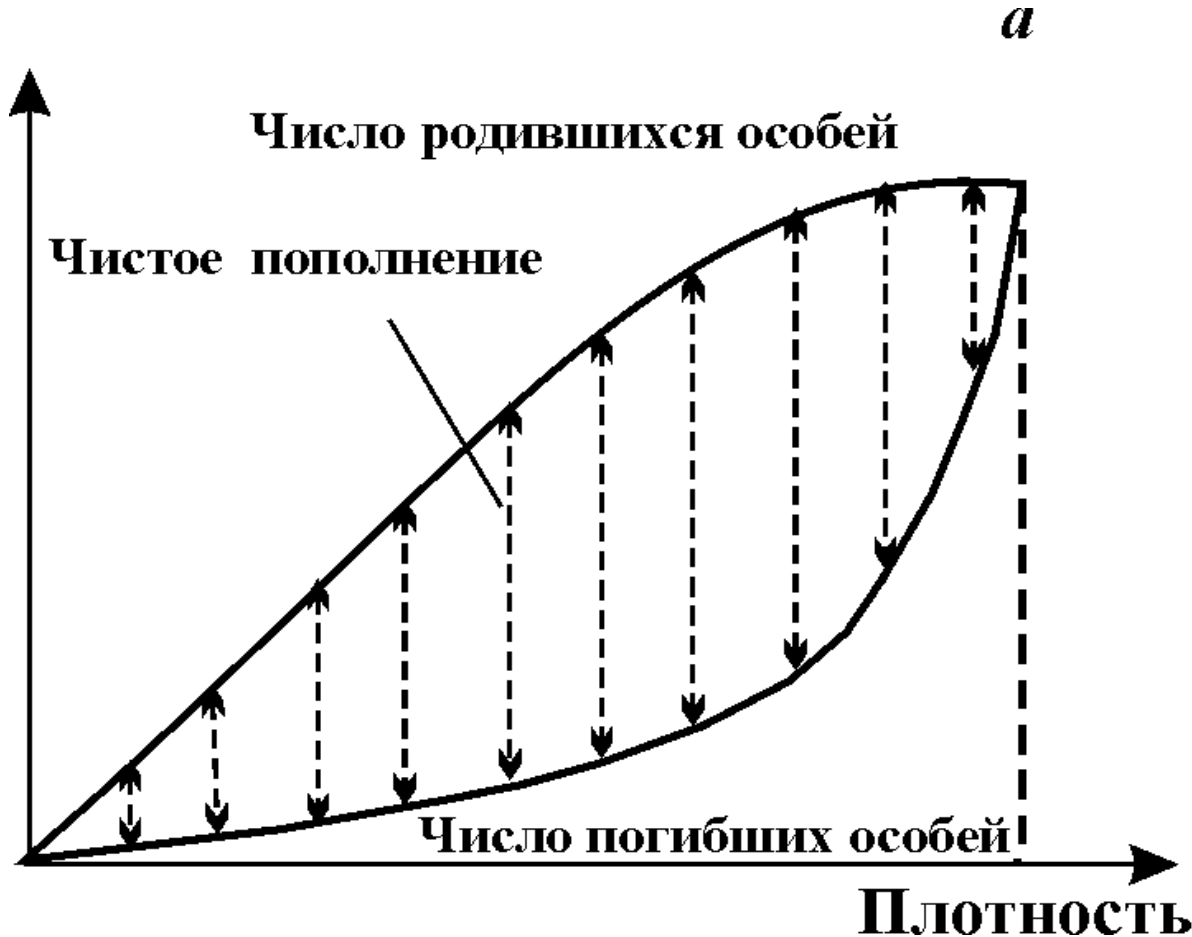


*б*

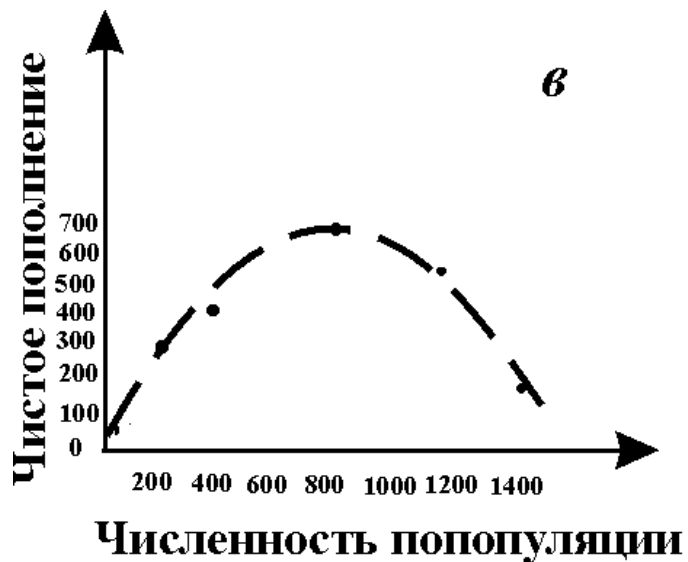
Водоросль *Chlorella*  
в культуре  
(Pearsall, Bengry,  
1940)

$$\frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right)$$

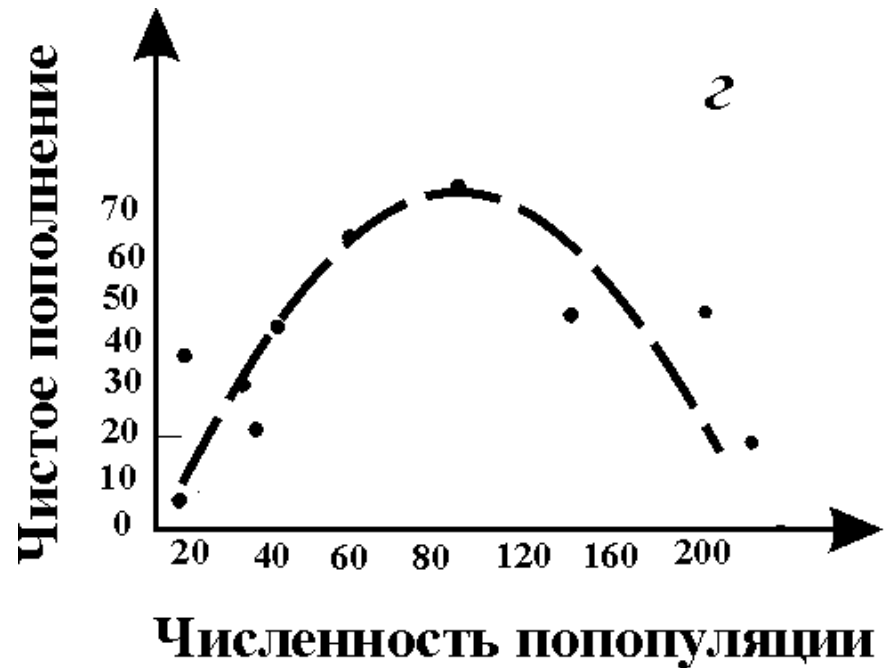
# Кривые пополнения



# Примеры кривых пополнения (1)

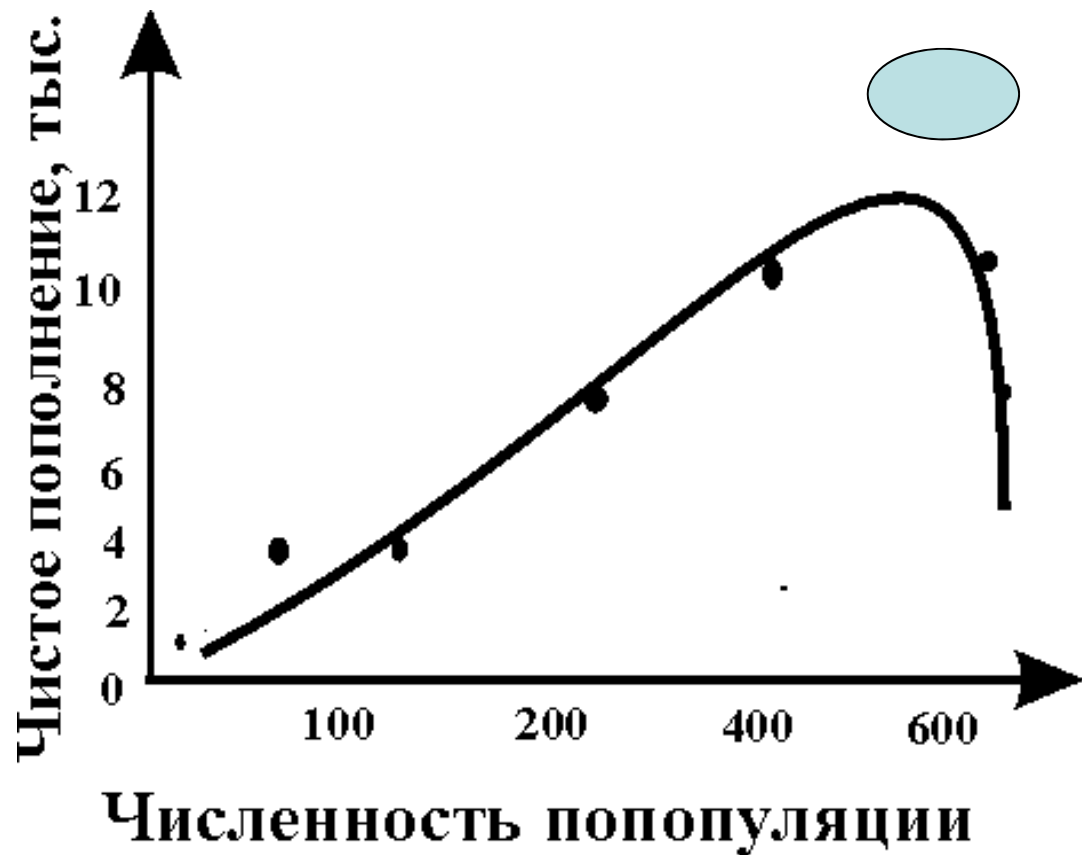


численность фазана обыкновенного  
на о. Протекшн - Айленд  
после его интродукции в 1937 г.  
(Einarsen, 1945);



экспериментальная популяция  
плодовой мушки *Drosophyla  
melanogaster* (Pearl, 1927)

# Примеры кривых пополнения (3)

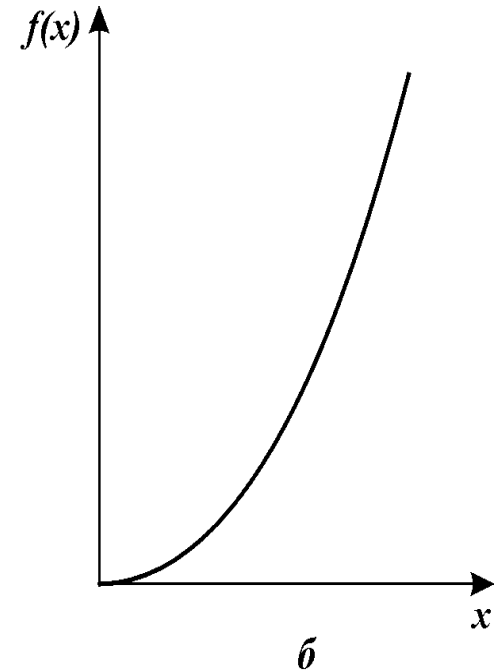
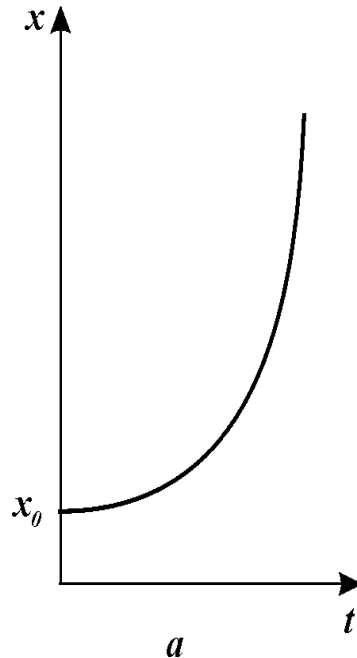


оценка  
численности  
*арктического*  
*финвала*  
(Allen, 1972)

# Учет двуполого размножения

$$\frac{dx}{dt} = rx^2$$

$$\frac{dx}{dt} = a \frac{\beta x^2}{\beta + \tau x}$$

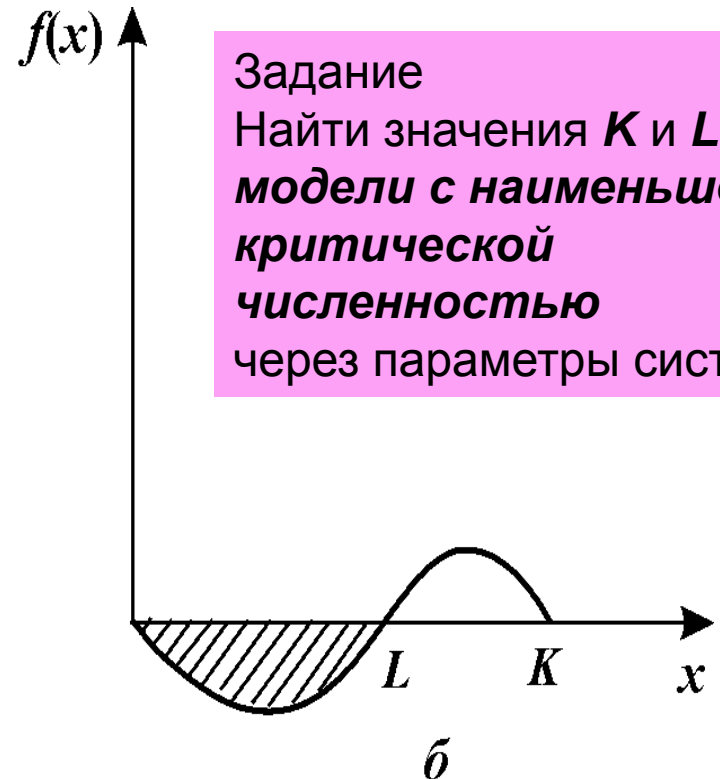
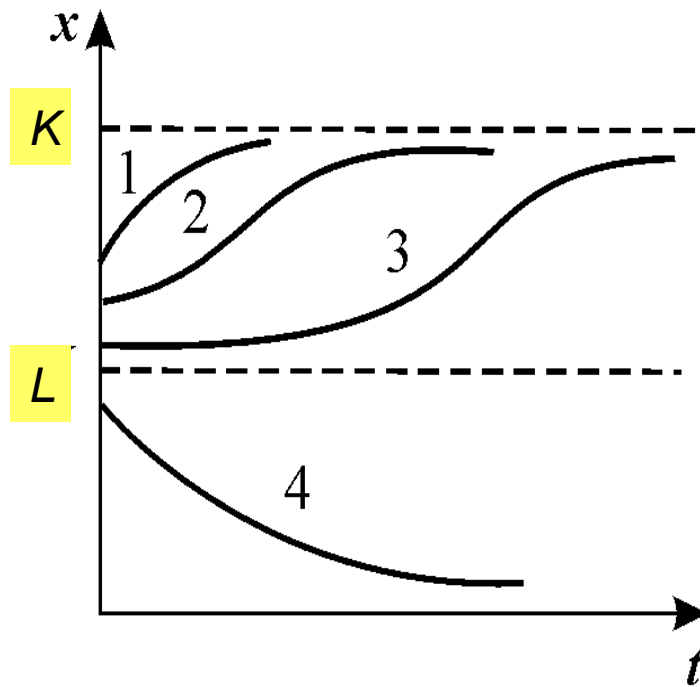


При низких плотностях скорость размножения пропорциональна вероятности встреч.

При высоких – числу самок в популяции.

Задание математикам и физикам  
Решить уравнения двуполого размножения

# Наименьшая критическая численность

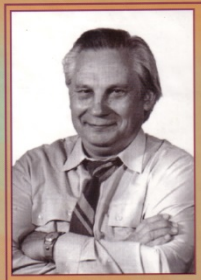
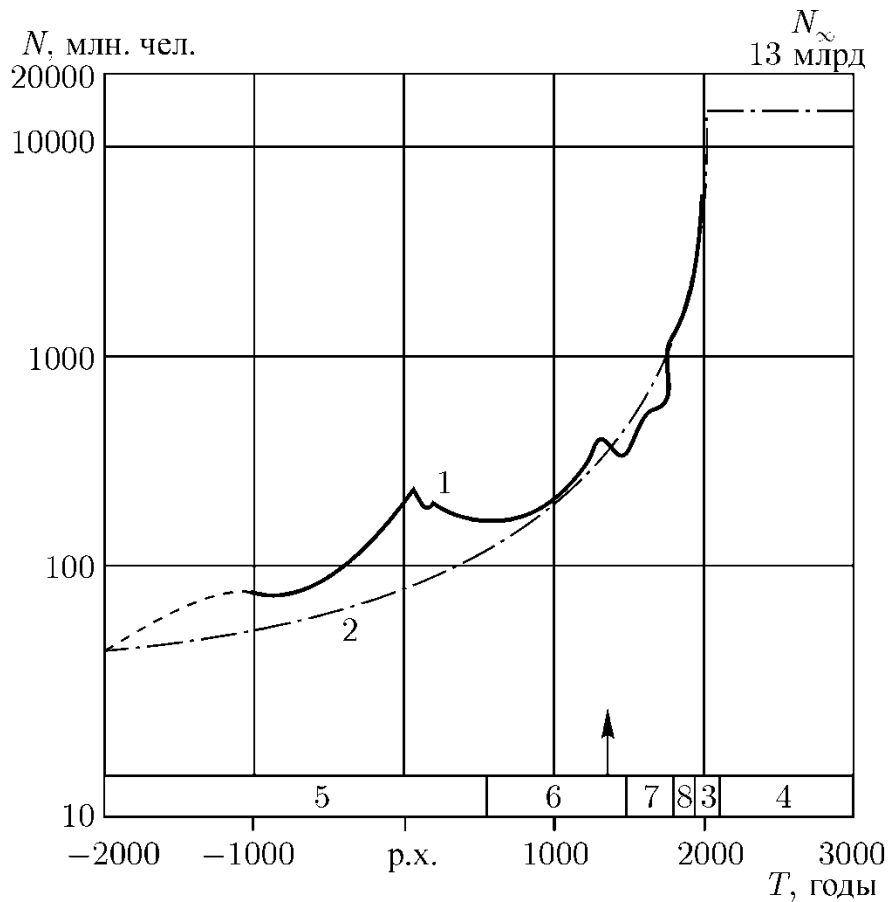


Задание  
Найти значения  $K$  и  $L$  в  
модели с наименьшей  
критической  
численностью  
через параметры системы

$$\frac{dx}{dt} = a \frac{\beta x^2}{\beta + \tau x} - dx - \delta x^2$$



## Динамика численности человечества



С.П. КУРДЮМОВ

РЕЖИМЫ  
С ОБОСТРЕНИЕМ  
ЭВОЛЮЦИЯ  
ИДЕИ

Сергей Петрович  
Капица (1928-2012)

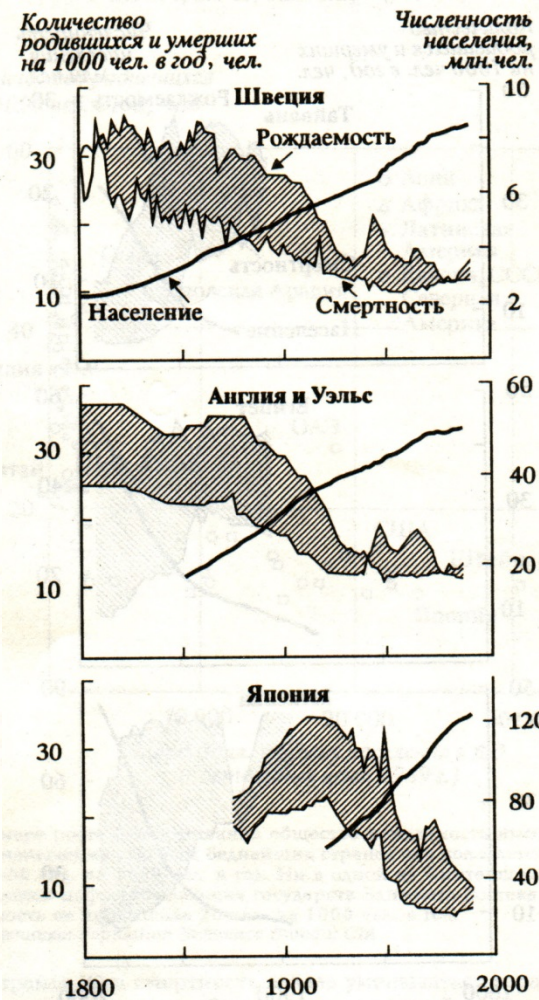
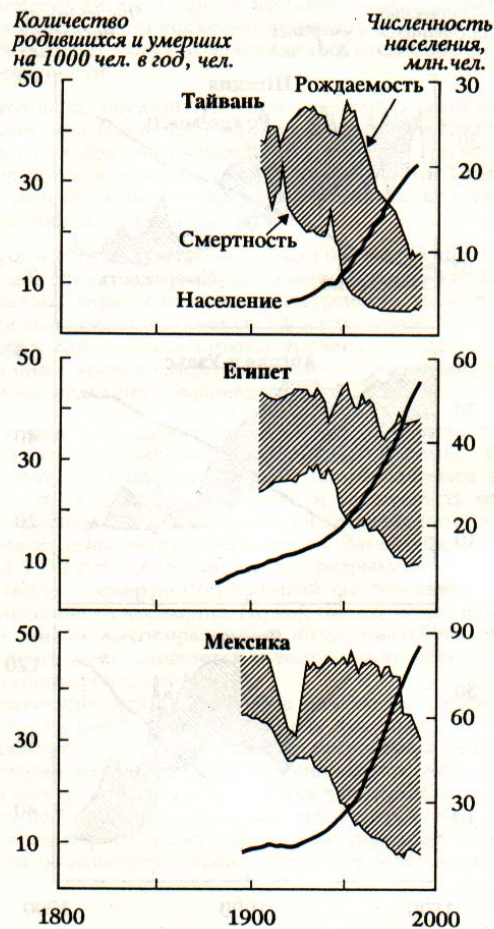
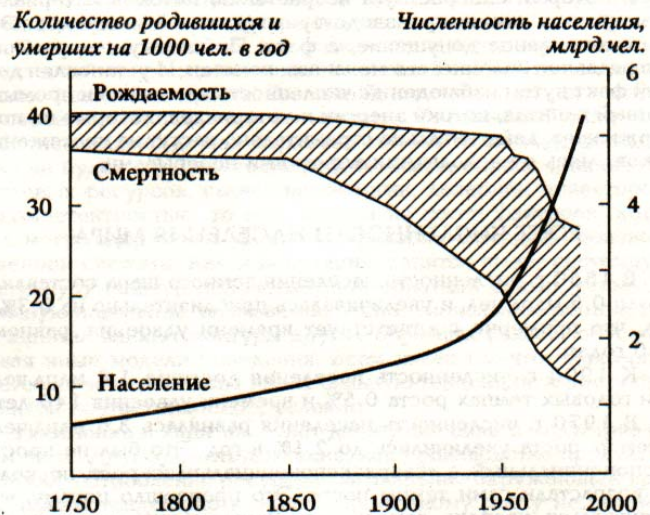
Общая теория  
роста человечества 1999

Г.Ю.Ризниченко  
А.Б.Рубин  
Биофизическая динамика  
продукционных процессов  
2004. Глава 8

Сергей  
Павлович  
Курдюмов  
1929-2004

Тема для  
реферата

# Прирост численности населения (пополнение)



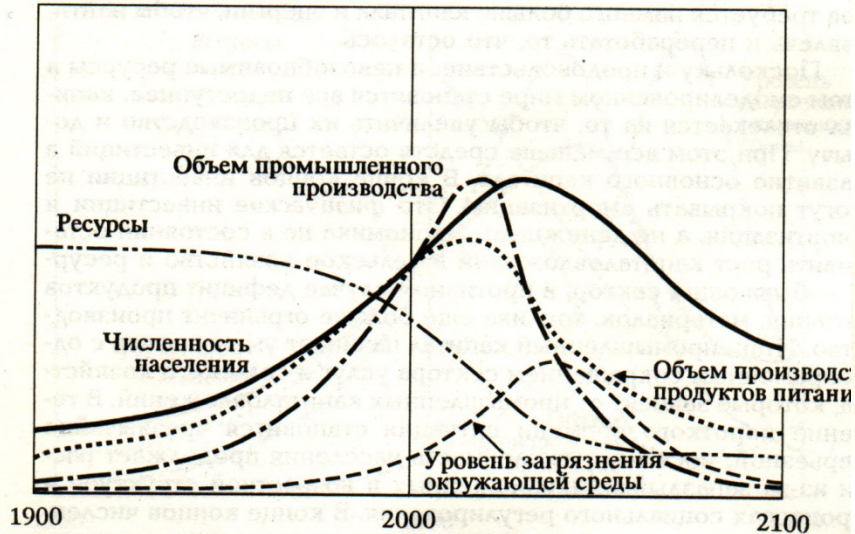


# Модель глобального роста

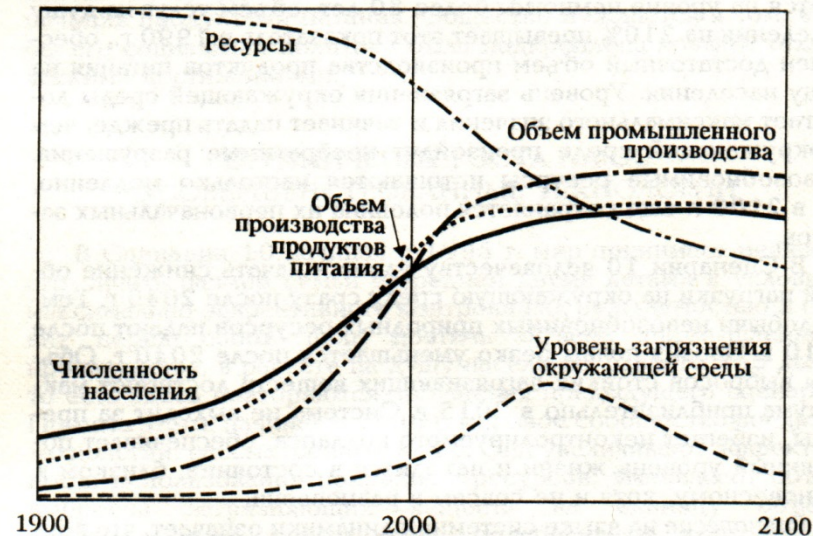
- Невозможно решить проблему на том уровне, на котором она возникла. Нужно стать выше этой проблемы, поднявшись на следующий уровень
- Альберт Эйнштейн
- Forrester J.W. World dynamics. 1971
- Форрестер Дж. Мировая динамика. М., Наука, 1978
- Meadows D.U. et al. The dynamics of the growth in a finite world. 1974
- Meadows D. et al., The limits to growth. 1972
- Медоуз и др., Пределы роста, изд. МГУ, 1991
  - За пределами роста 1994
  - Пределы роста 30 лет спустя. 2008

# Принятие мер в 1995 году

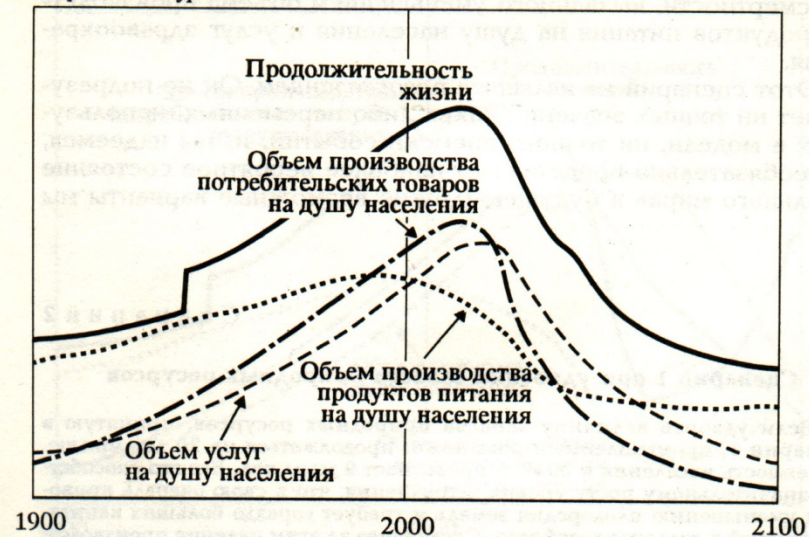
Состояние мира



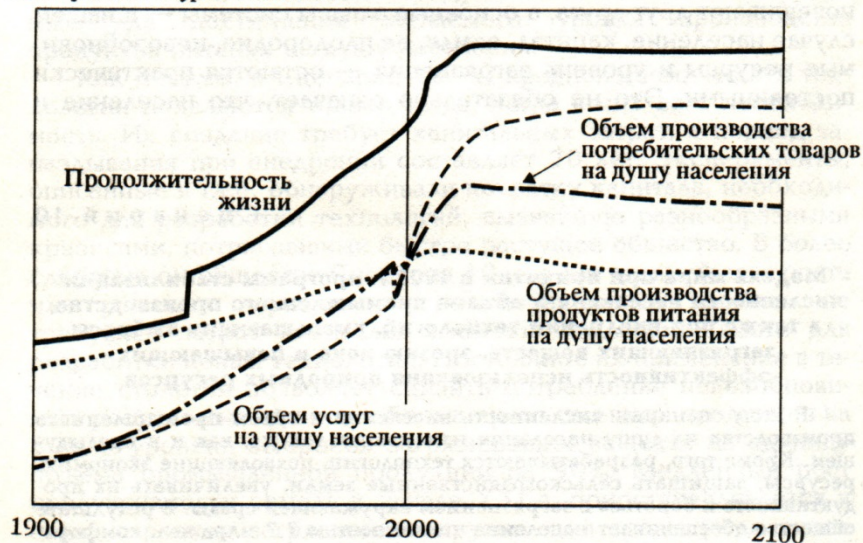
Состояние мира



Материальный уровень жизни



Материальный уровень жизни

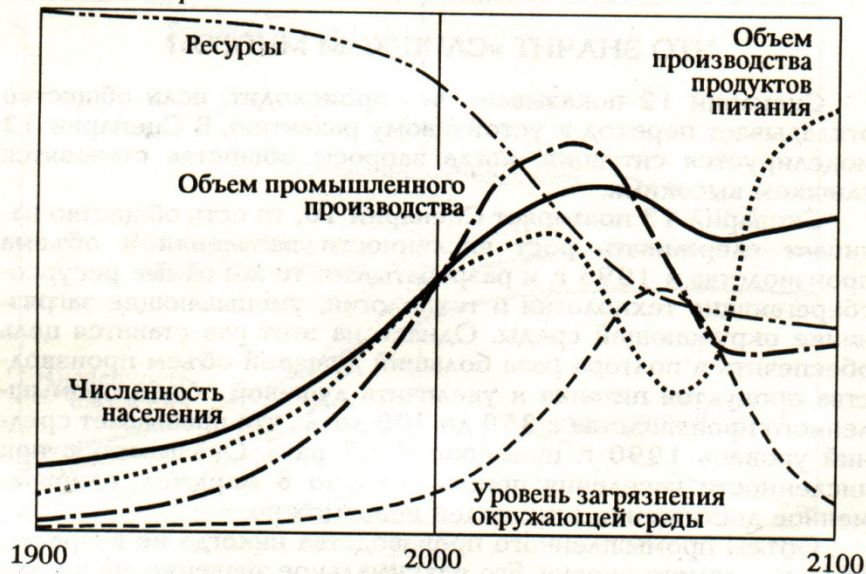


# Принятие мер в 2015 году

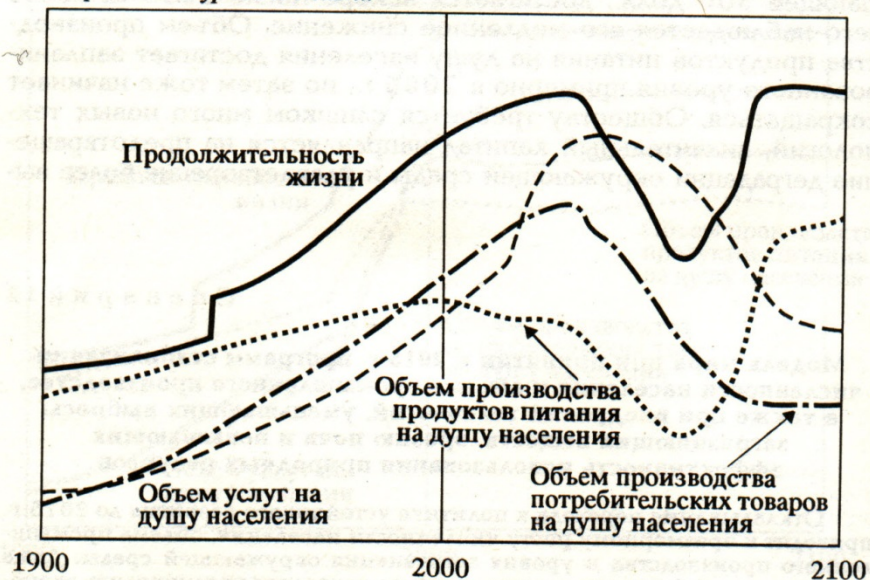
Запаздывание в принятии мер предотвращения кризиса

Тема для реферата  
Современная глобальная динамика

Состояние мира



Материальный уровень жизни



## Задание

Привести (из своей области) примеры процессов, которые могут быть описаны кривой с насыщением. Взаимодействие каких процессов более низкого уровня приводит к насыщению?

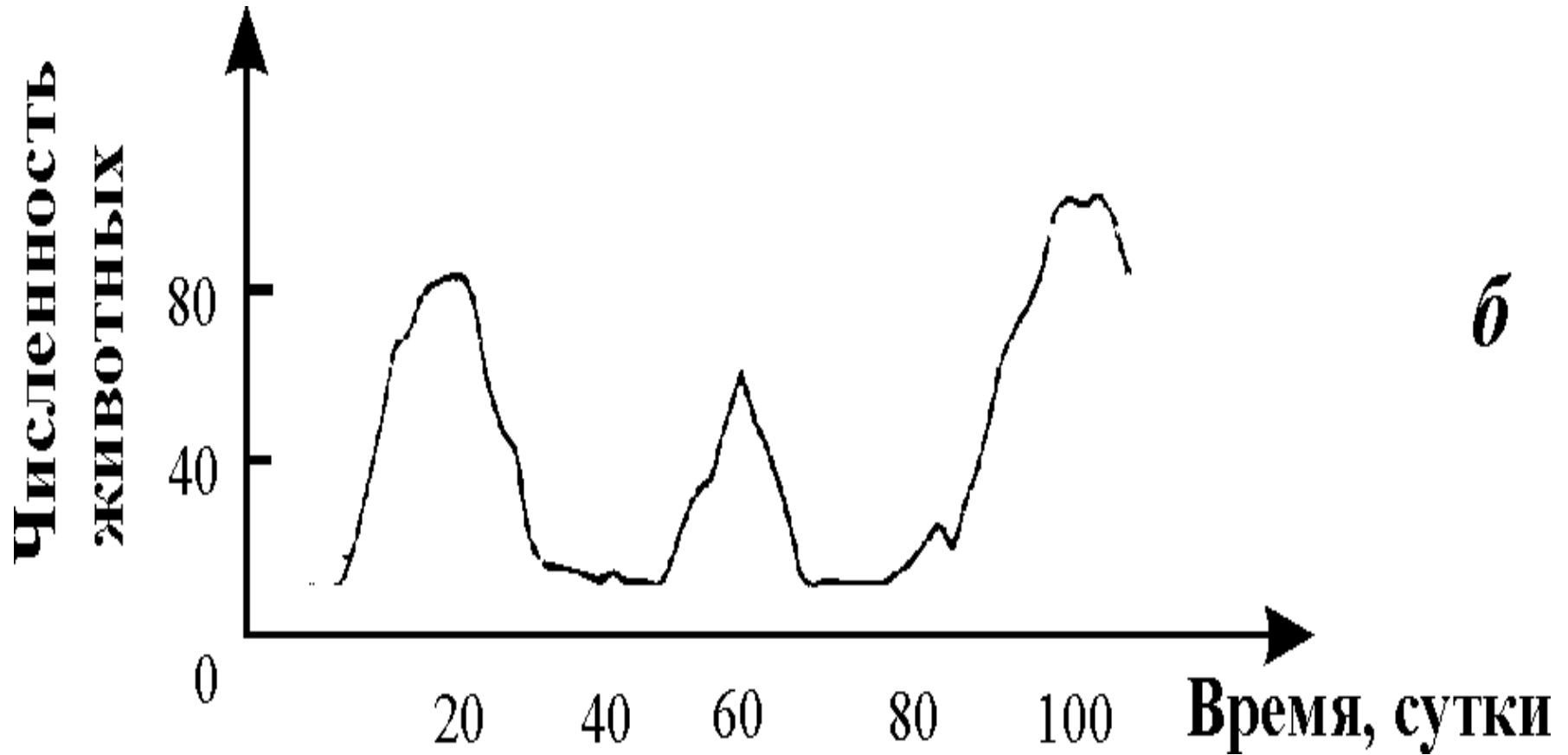
# Динамика численности популяции

- Численность может меняться во времени различным образом: расти, совершать колебания, падать.

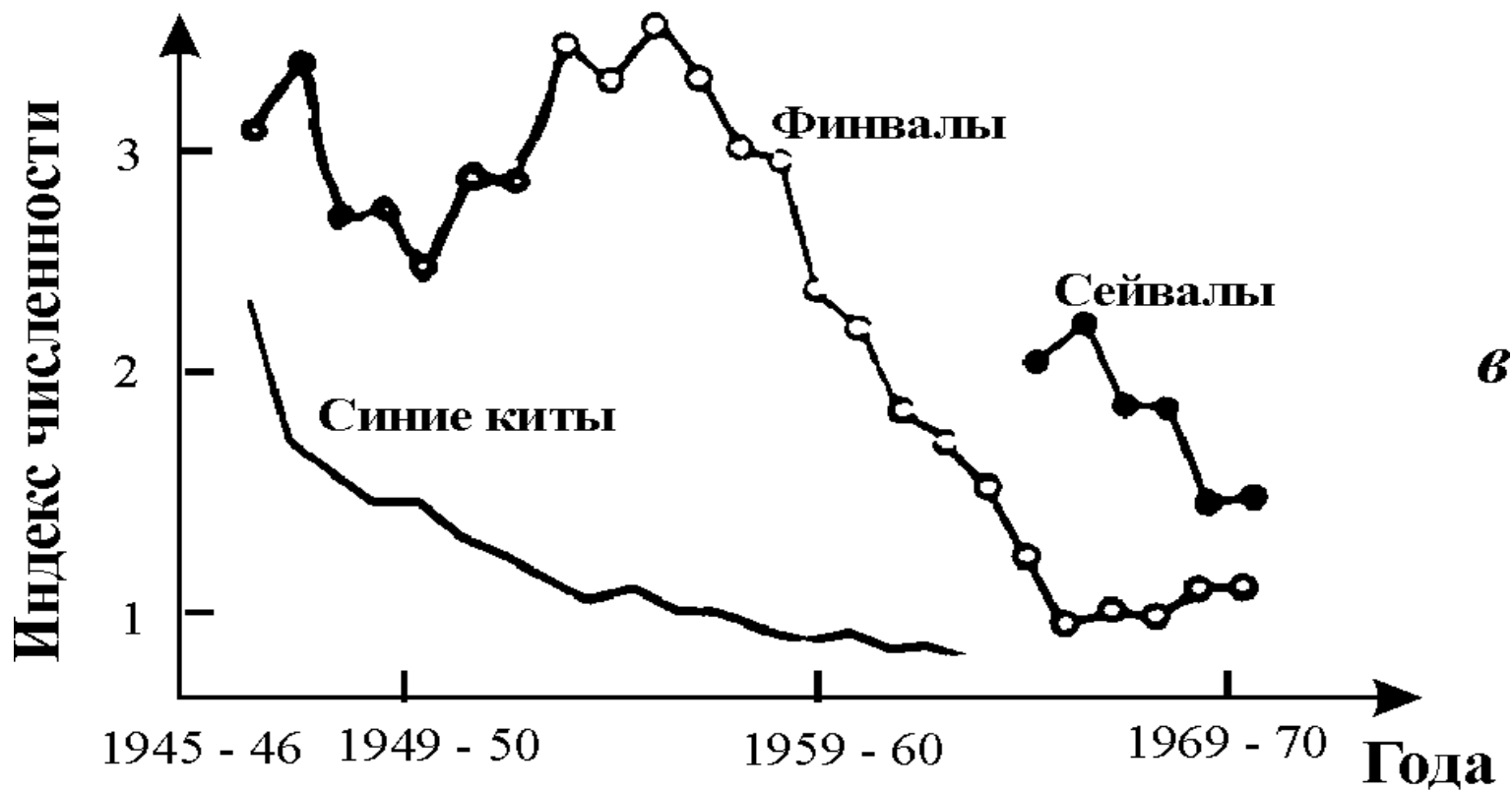
# Численность поголовья овец на острове Тасмания (*Davidson, 1938*)



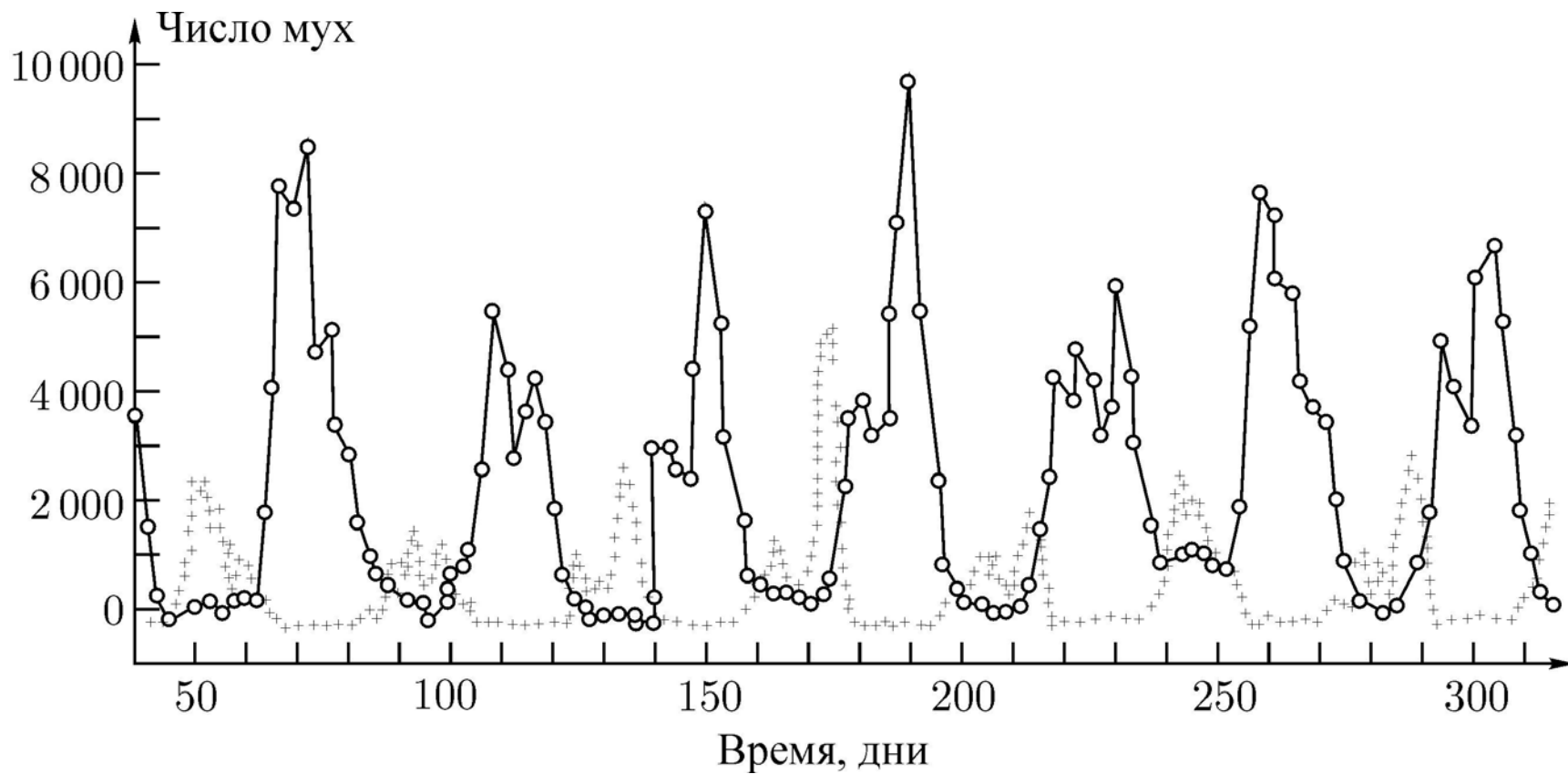
# Изменение численности *Daphnia magna* (Frall, 1943)



Динамика численности трех видов китов в Антарктике (приведена по изменению «индекса численности» убитых китов на 1 тыс. судо - тонно - суток, *Gulland, 1971*)



Численность мух *Lucilia* в популяционном ящике (Nicholson, 1954)  
1 – взрослые особи. Крестики – число яиц, отложенных за один день





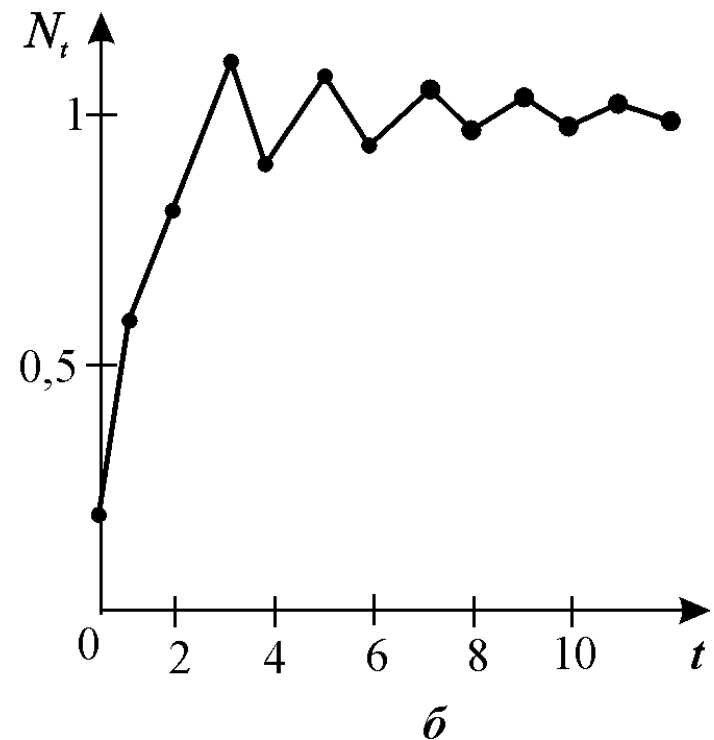
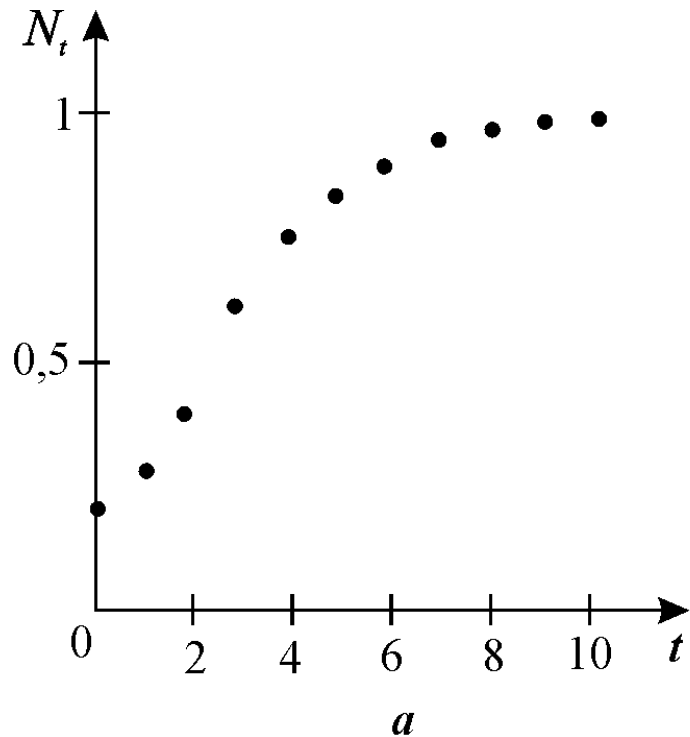
# Причины, обуславливающие тип динамики популяции:

- Собственные свойства популяции
- Изменение параметров окружающей среды
- Взаимодействие видов

# Дискретные модели популяций

Монотонный и немонотонный рост  
Колебания  
хаос

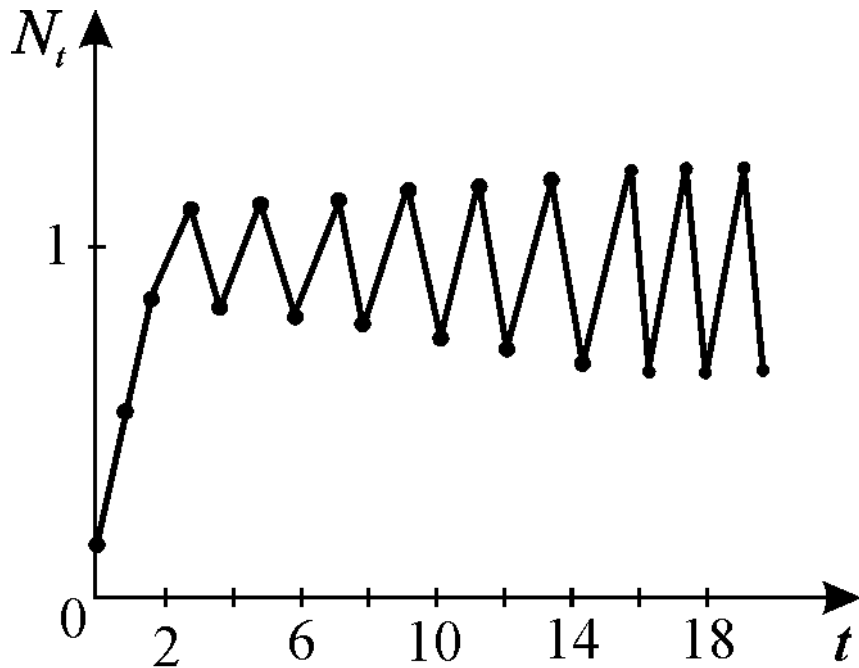
*Равновесие устойчиво, если  $0 < r < 2$ ,  
решение монотонно при  $0 < r < 1$  и  
представляет собой затухающие колебания  
при  $1 < r < 2$ .*



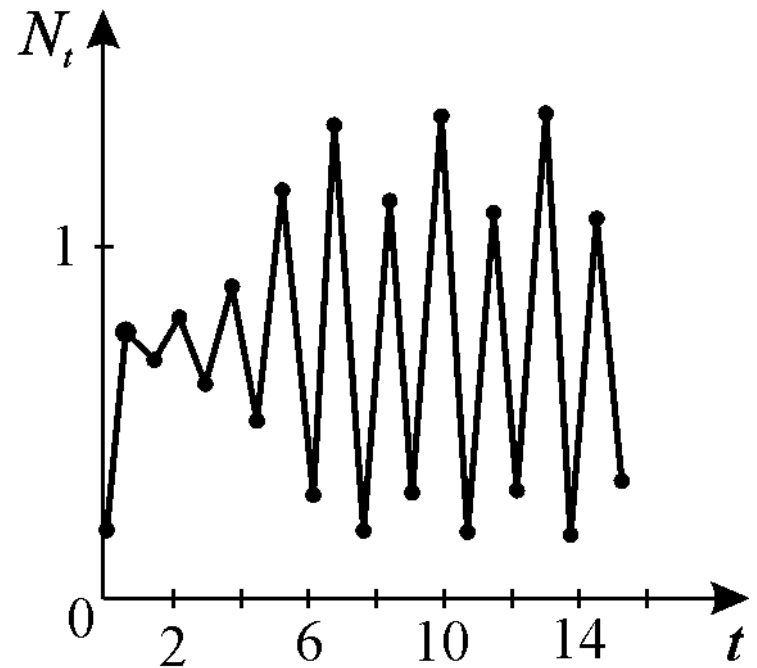
$$N_{t+1} = N_t \exp \left\{ r \left( 1 - \frac{N_t}{K} \right) \right\}$$

при  $2 < r = r_2 < 2,526$  – двухточечные циклы

при  $r_2 < r < r_c$  появляются циклы длины  $4, 8, 16, \dots, 2k$ .



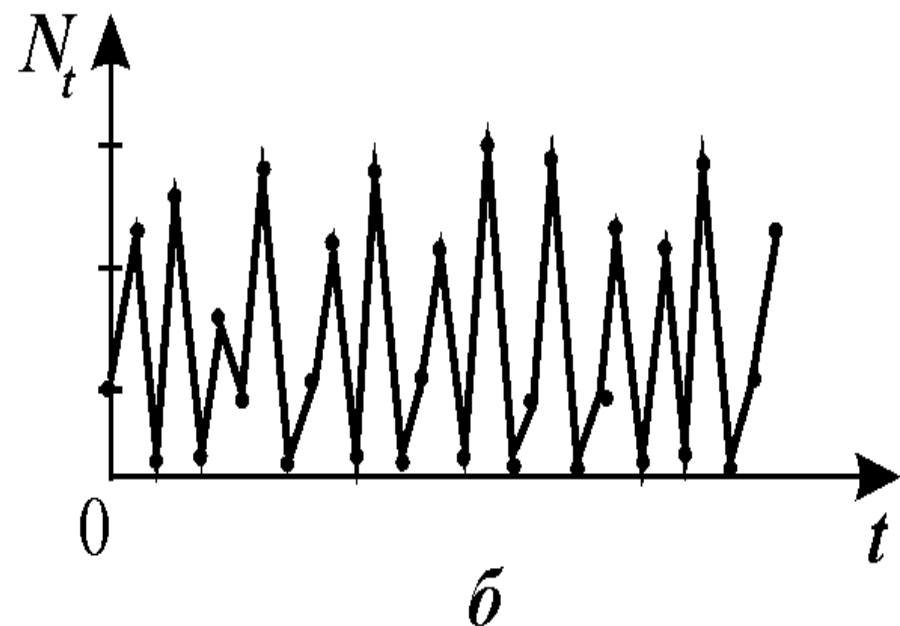
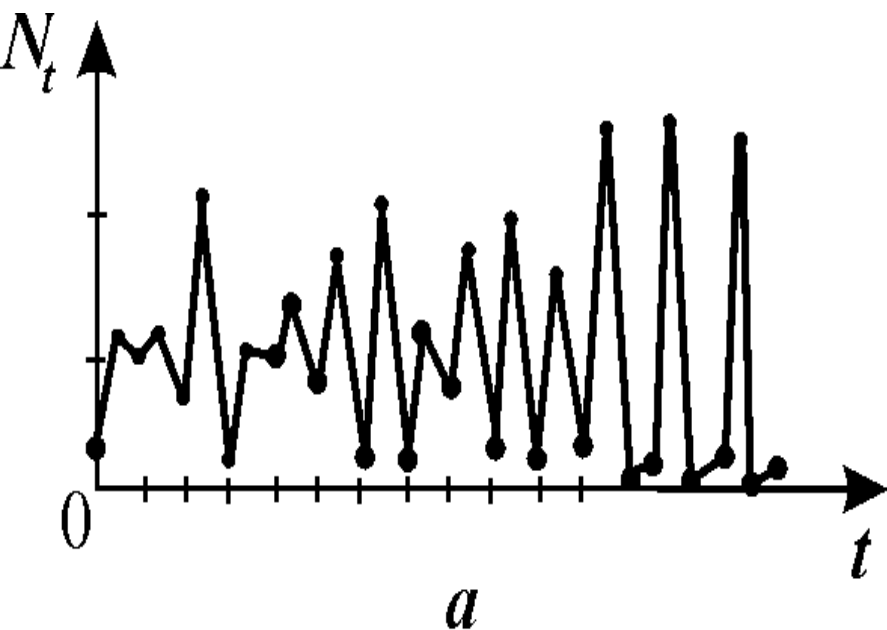
*a*



*б*

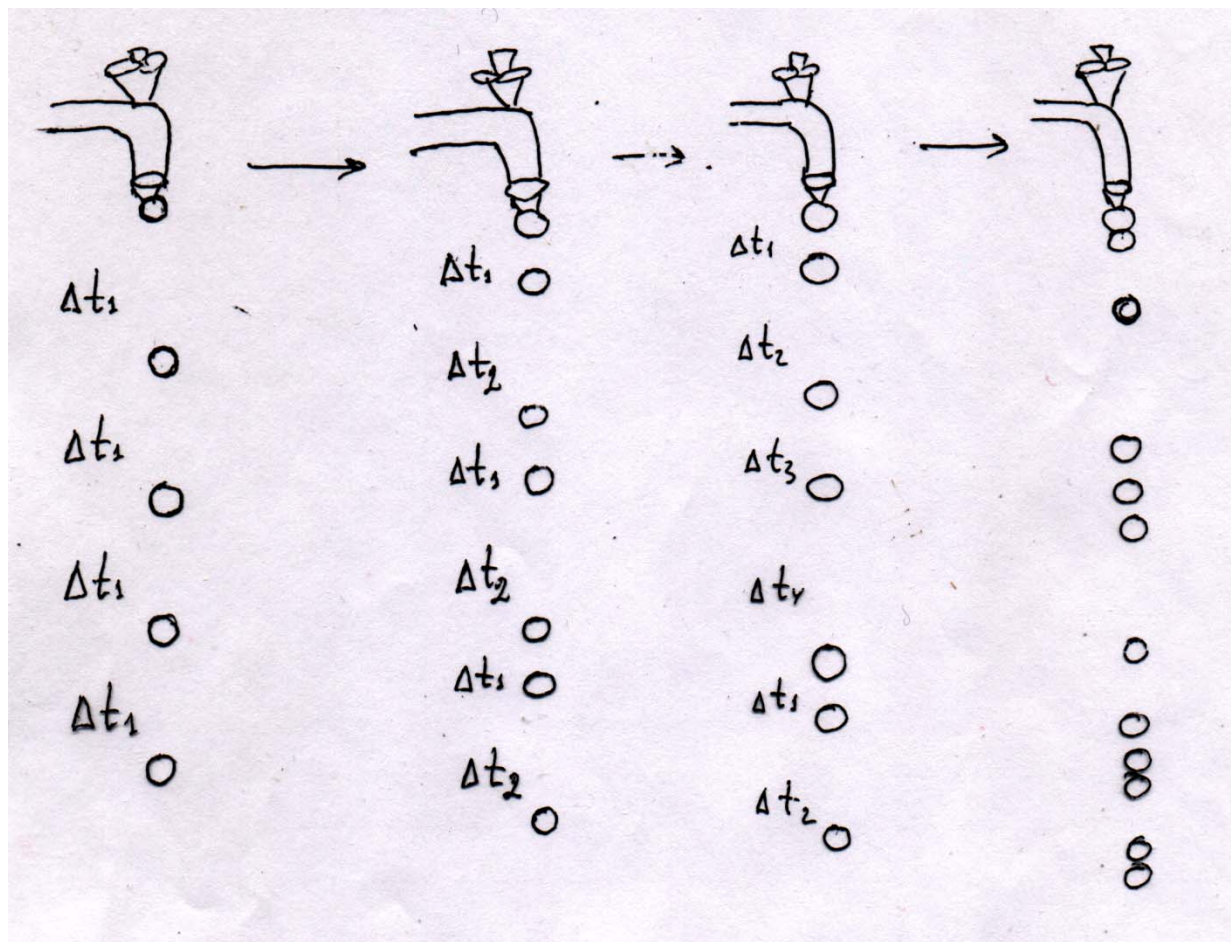
$$N_{t+1} = N_t \exp \left\{ r \left( 1 - \frac{N_t}{K} \right) \right\}$$

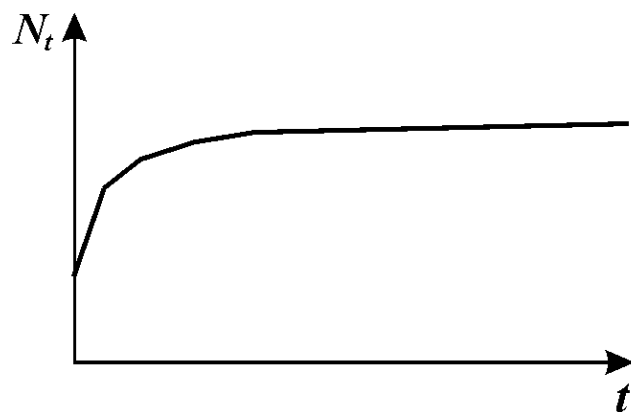
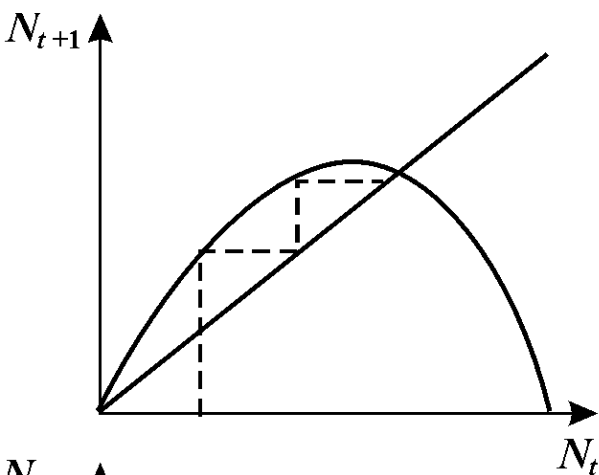
При  $r > r_c = 3,102$  решение зависит от начальных условий. Существуют *трехточечные циклы* и *квазистохастические решения*.



$$N_{t+1} = N_t \exp \left\{ r \left( 1 - \frac{N_t}{K} \right) \right\}$$

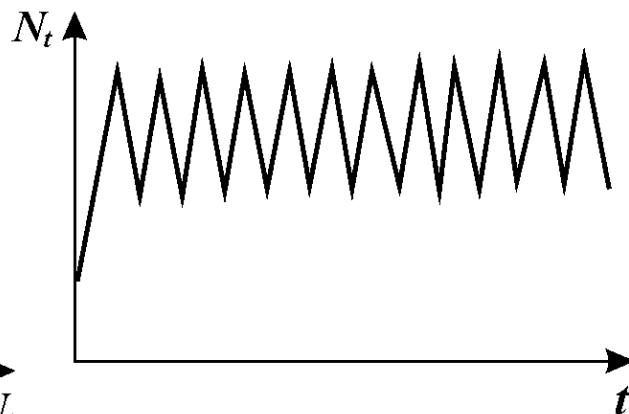
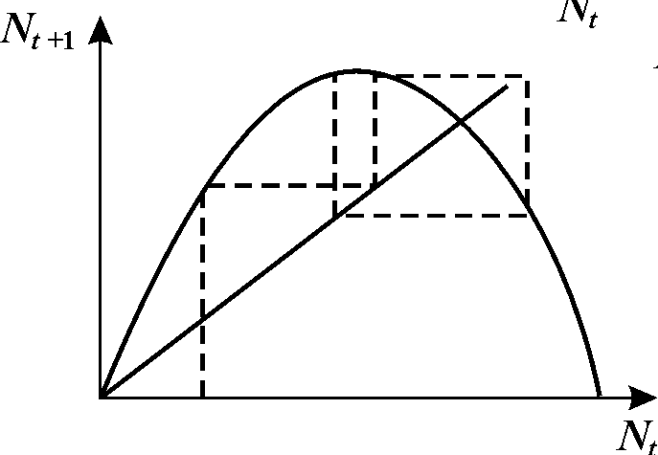
# Переход к хаосу через удвоение периода



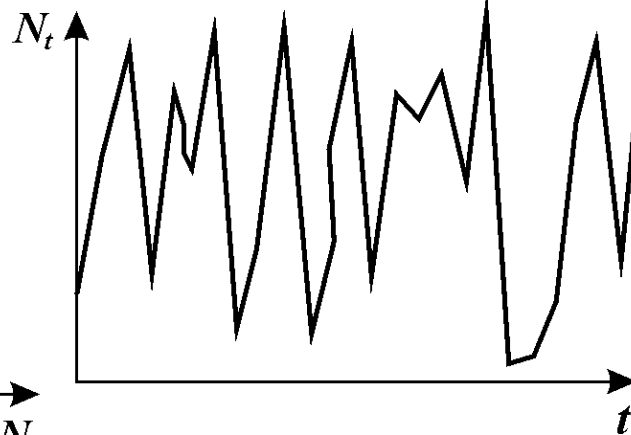
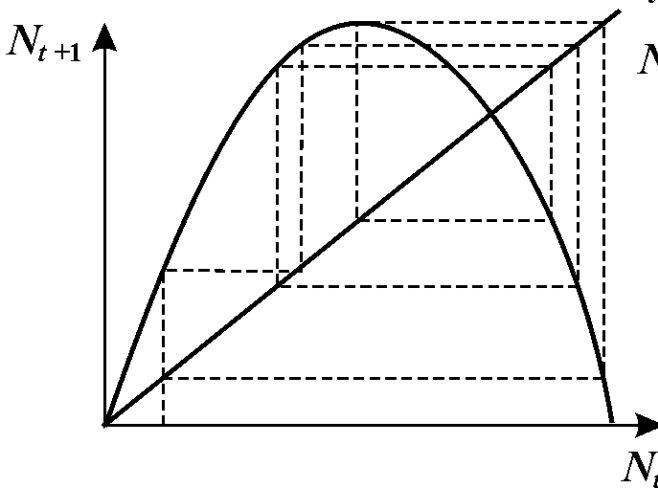


*a* Квадратичное отображение

$$N_{t+1} = aN_t(1-N_t)$$

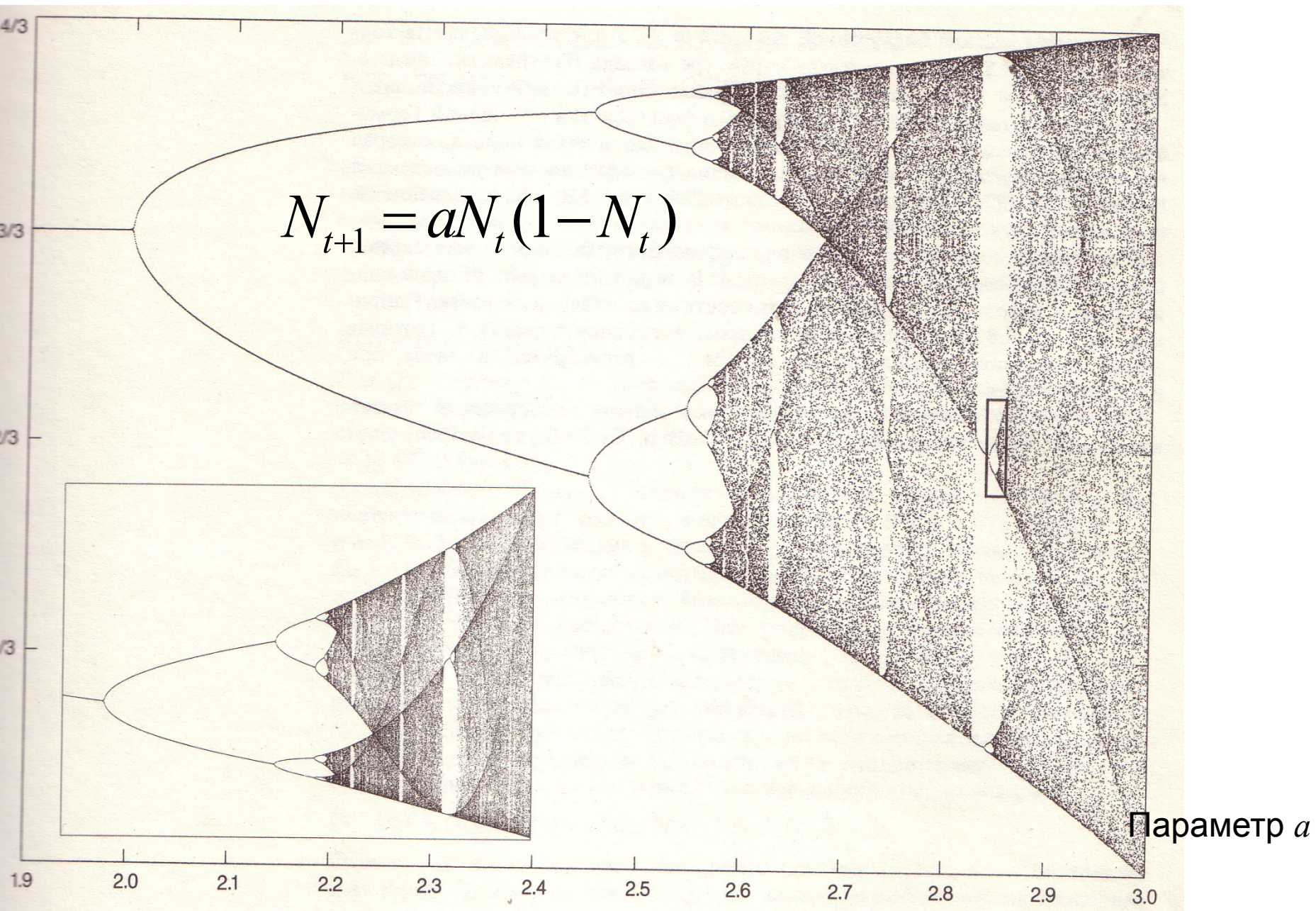


*б*



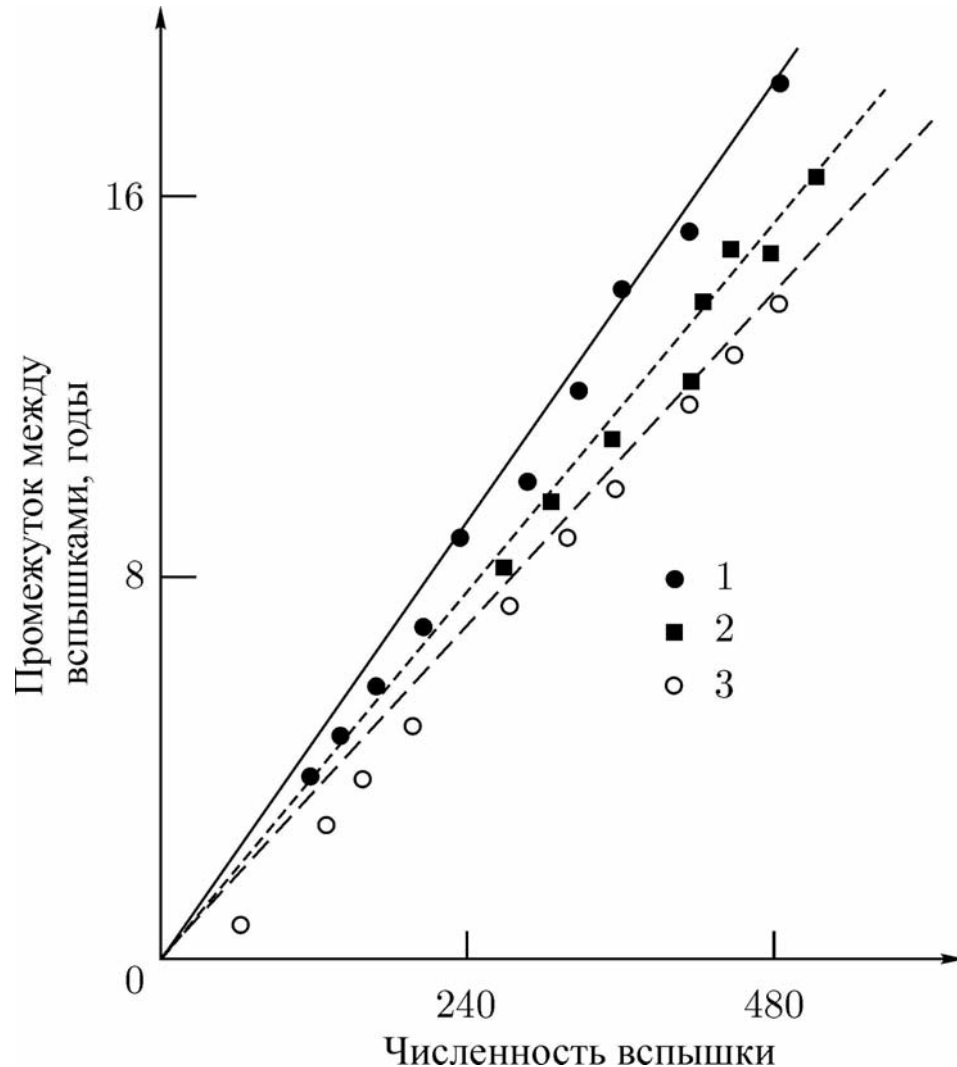
*в*

# Бифуркационная диаграмма перехода к хаосу через удвоение периода

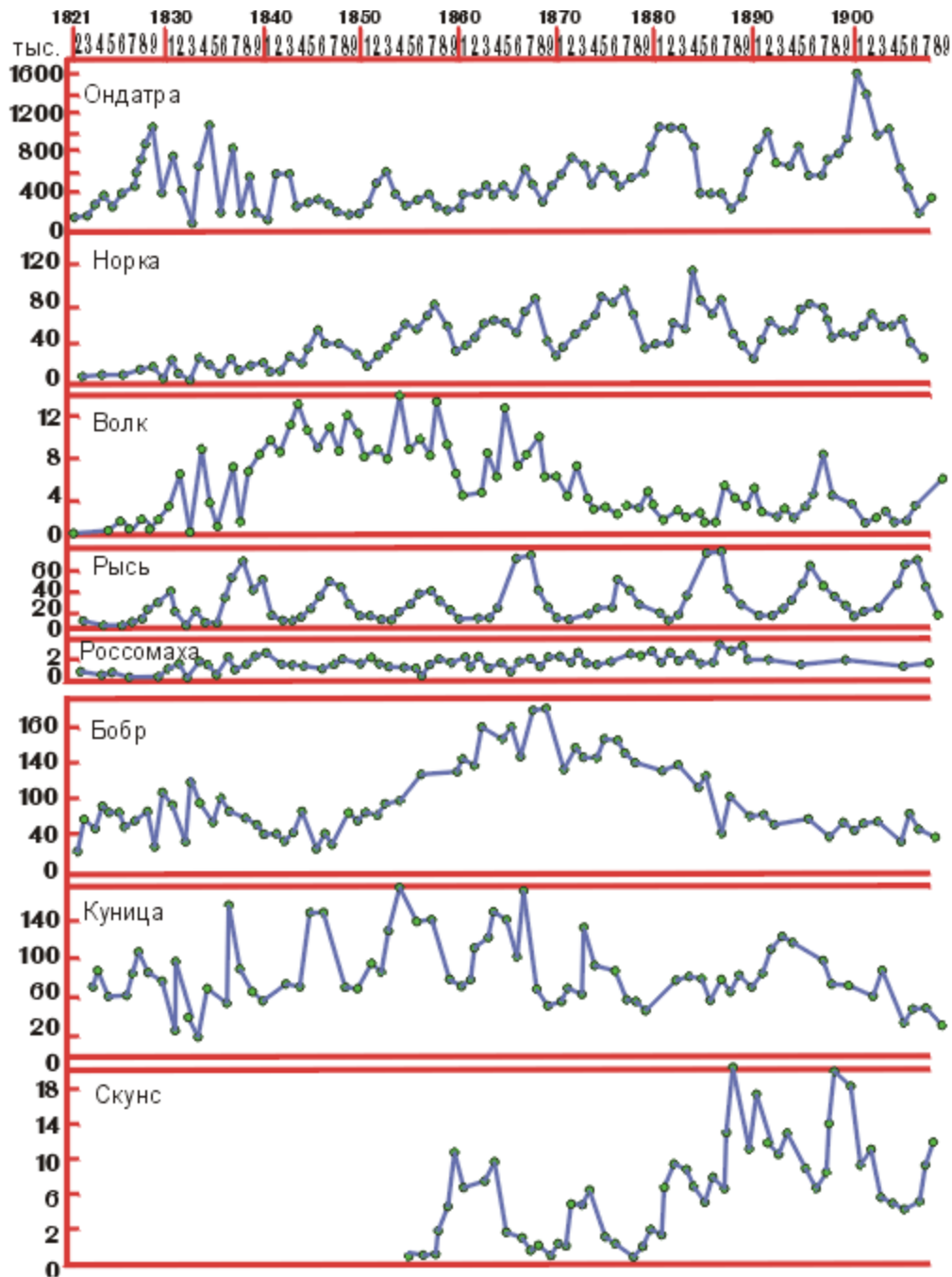




Если функция  $F(N)$  имеет один экстремум и точку перегиба на падающей части, то чем больше амплитуда вспышки, тем длительнее интервал малых численностей популяции



Vandermeer, 1982



Кинетические  
кривые  
численности  
пушных зверей  
по данным  
компании  
Гудзонова  
залива.  
(Сетон-Томсон,  
Торонто, 1911)