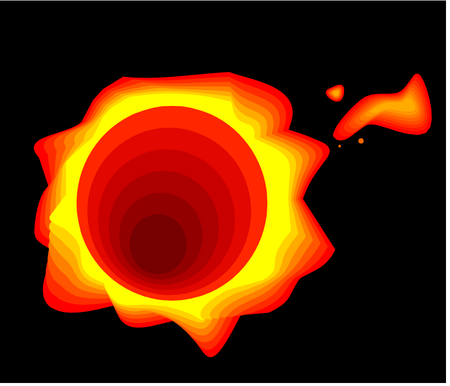
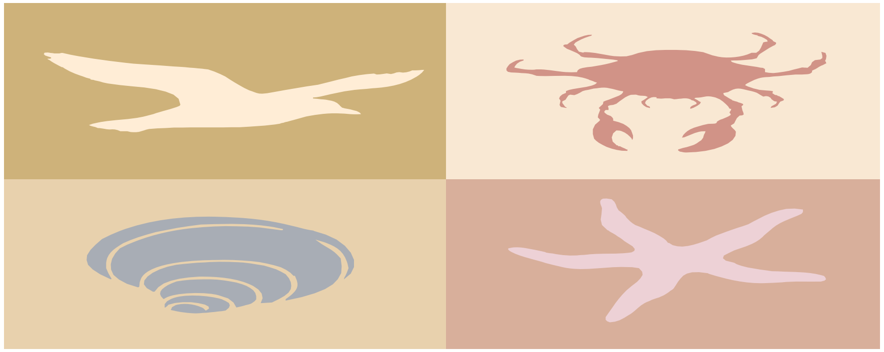
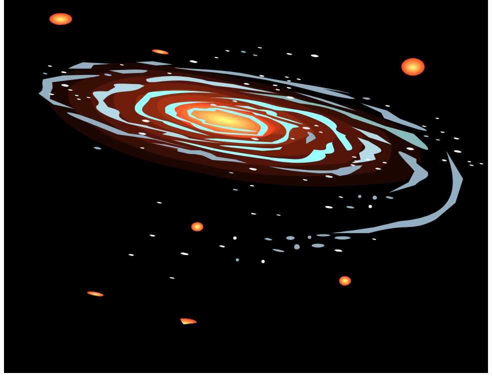




www.biophys.msu.ru

Модели нелинейного мира

Лекция 4

Галина Юрьевна Ризниченко

Каф. биофизики Биологического ф-та Московского государственного университета им. М.В.Ломоносова, к.119

тел: +7(495)9390289; факс: (495)9391115;

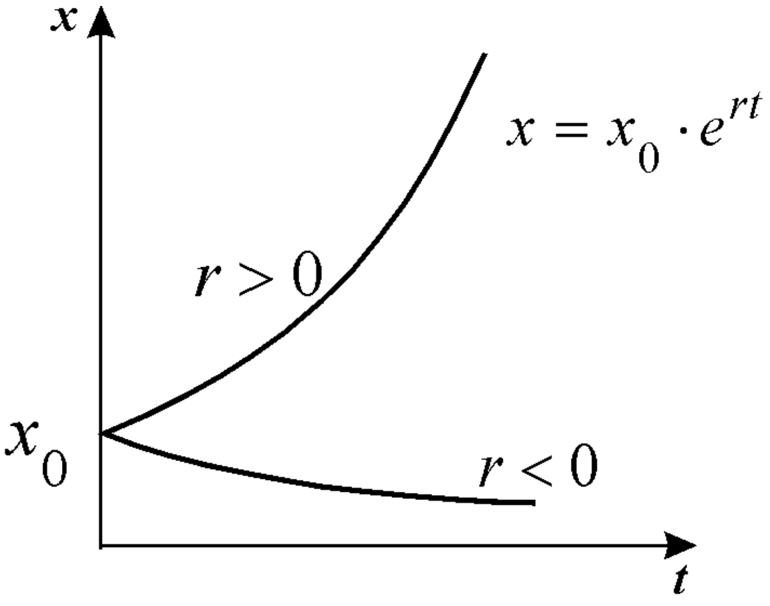
E-mail: riznich@biophys.msu.ru

http://mathbio.professorjournal.ru/mnw

Линейный мир

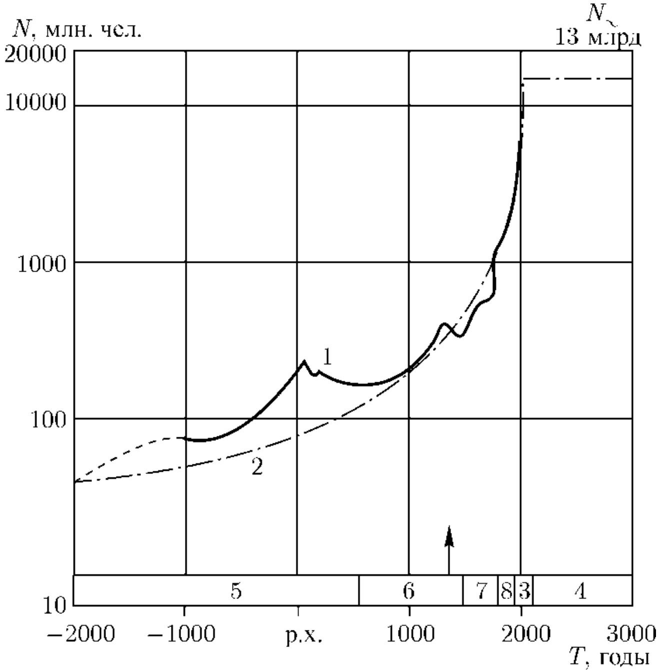
- **Линейное дифференциальное уравнение**. Уравнение роста популяции Мальтуса (1798)

$$\frac{dx}{dt} = rx\,.$$

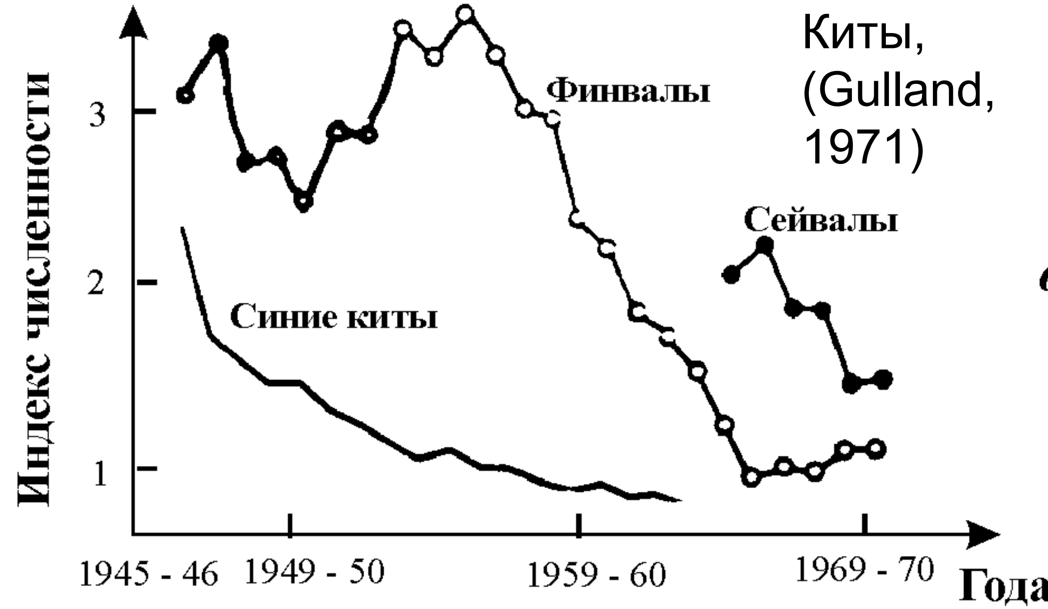


Нелинейный мир

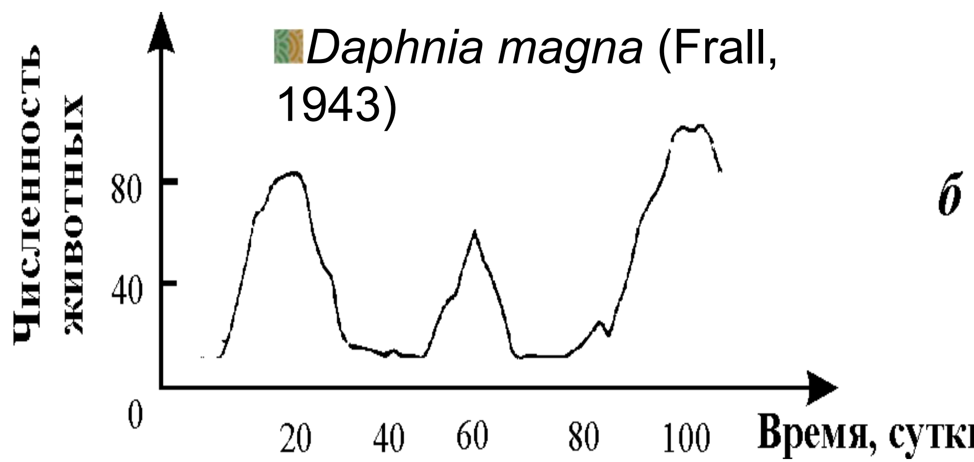
Рост человечества. Капица. 2004



Киты, (Gulland, 1971)



Daphnia magna (Frall, 1943)



Причины, обуславливающие тип динамики популяции:

- Собственные свойства популяции
- Изменение параметров окружающей среды
- Взаимодействие видов

Уравнение Ферхюльста

$$\frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right)$$

$$x(t) = \frac{x_0 K e^{rt}}{K - x_0 + x_0 e^{rt}}$$

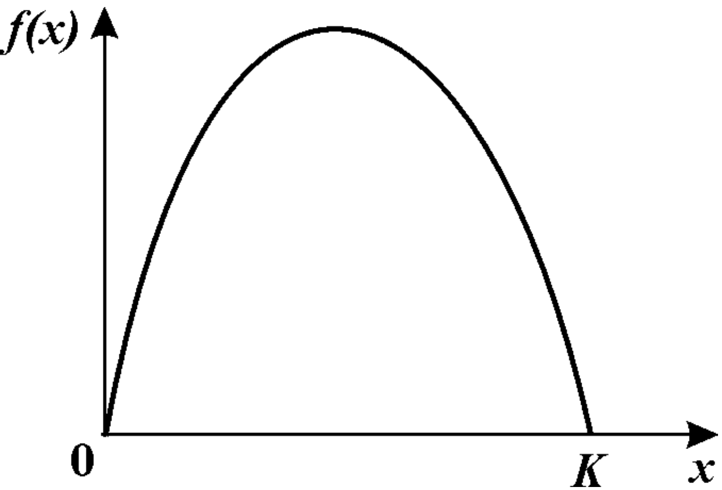
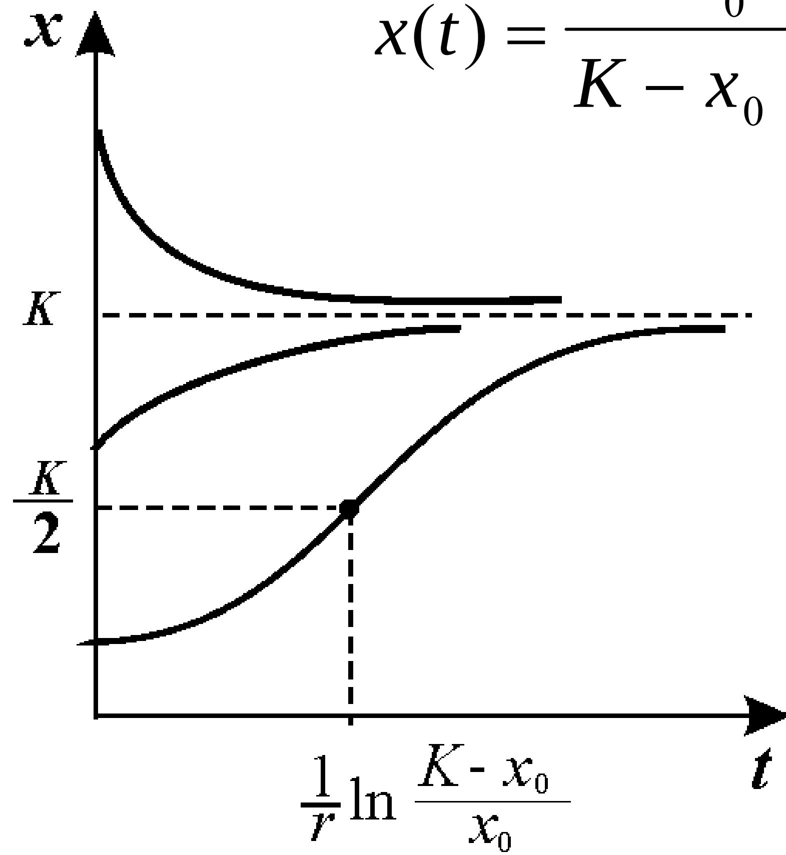


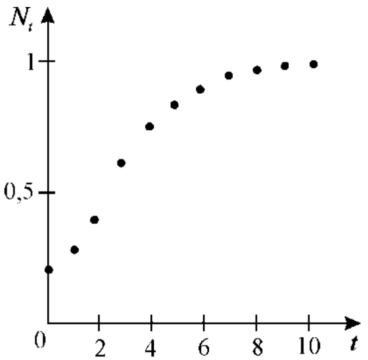
График функции $f(x)$



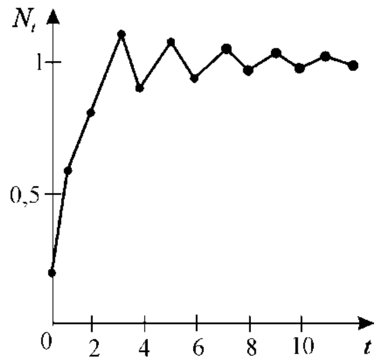
Поведение x во времени

Дискретная модель логистического роста

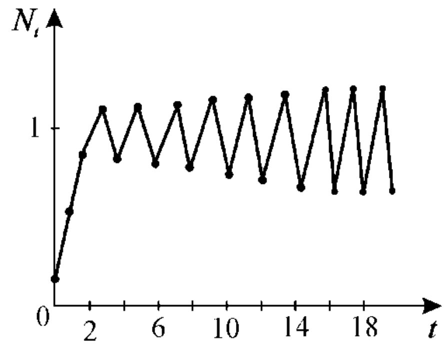
$$N_{t+1} = N_t \exp\left\{ r\left(1 - \frac{N_t}{K}\right) \right\}$$



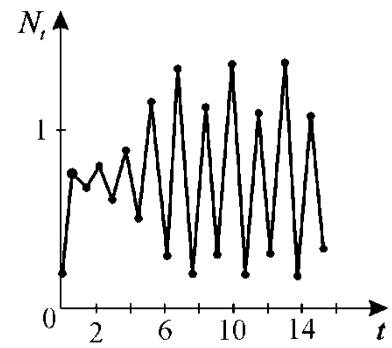
а



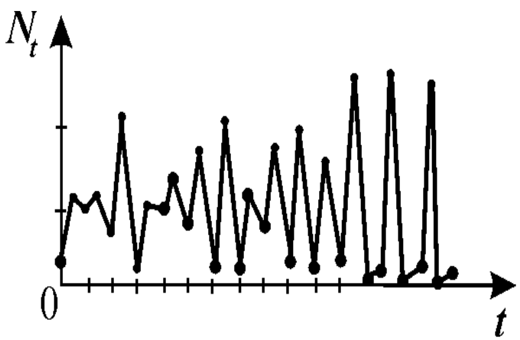
б



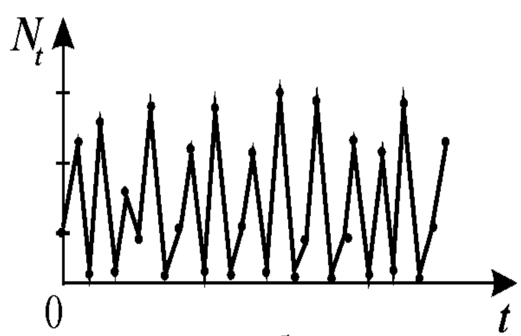
а



б



а



б

Причины, обуславливающие тип динамики популяции:

- Собственные свойства популяции
- Изменение параметров окружающей среды
- Взаимодействие видов

Динамическая система

- Динамическая система определяется пространством **X** и заданным на нем однозначным оператором $T(\Delta t)$, зависящим от параметра $\Delta t \geq 0$, так что каждой точке x оператор T ставит в соответствие единственную точку x^*, то есть

$$x^* = T(\Delta t)x$$

- При этом предполагается, что оператор $T(\Delta t)$ при любых допустимых $\Delta t_1 \geq 0$ и $\Delta t_2 \geq 0$ удовлетворяет соотношению
- $T(\Delta t_2)\, T(\Delta t_1) = T(\Delta t_1 + \Delta t_2)$

Пространство состояний
X – фазовое пространство

- **X** – пространство возможных состояний рассматриваемой системы
- обычно *x* – многомерный вектор с компонентами $x_1, x_2,\ldots,x_n$
- Описание *x* называется состоянием, или фазовой точкой (изображающей, представляющей точкой)

Система дифф. ур-ний 1-го порядка – динамическая система

Если существует предел $$\lim \frac{T(\Delta t)}{\Delta t} = L,$$

то состояние *x* как функция *t* удовлетворяет дифференциальному уравнению

,

$$\frac{dx}{dt} = Lx$$

Изменение состояния динамической системы может быть представлено системой дифференциальных уравнений 1-го порядка.

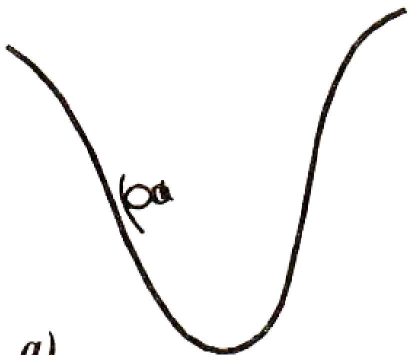
Игра «Жизнь» Конуэла

- Пространство состояний – множество всевозможных расположений фишек
- Состояние задается матрицей (8X8), элементы кот. – единицы и нули
- $\Delta t=1$
- оператор T – правила:

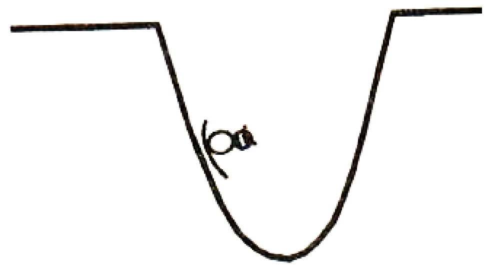
1) Фишка остается, если рядом с ней две или три других фишки,
2) Фишка убирается если рядом с ней более трех ли менее двух фишек,
3)На пустой клетке появляется новая фишка. Если рядом с ней было три фишки

Предлагается продемонстрировать Игру Жизнь

В физике часто фазовыми переменными являются расстояние и скорость



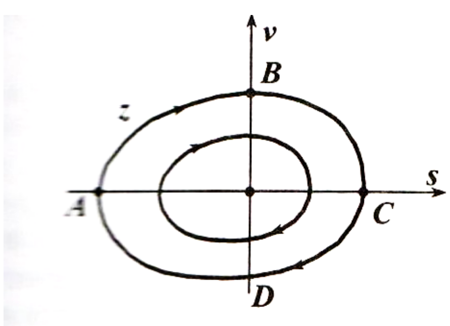
a)

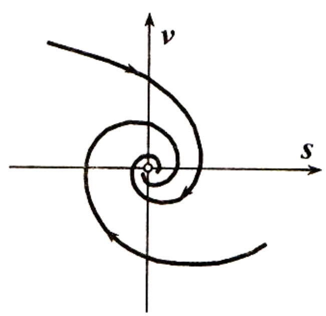


b) С трением

S- расстояние от центра горки
V - скорость

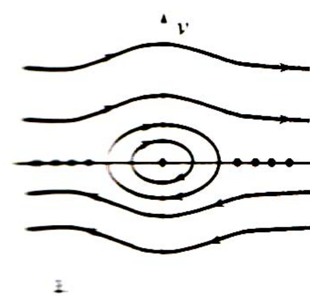
$$v = \frac{dS}{dt}$$

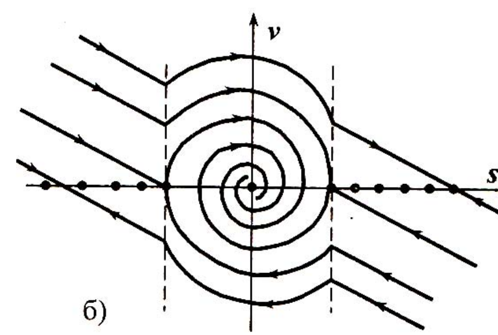




Без трения

Горка без краев



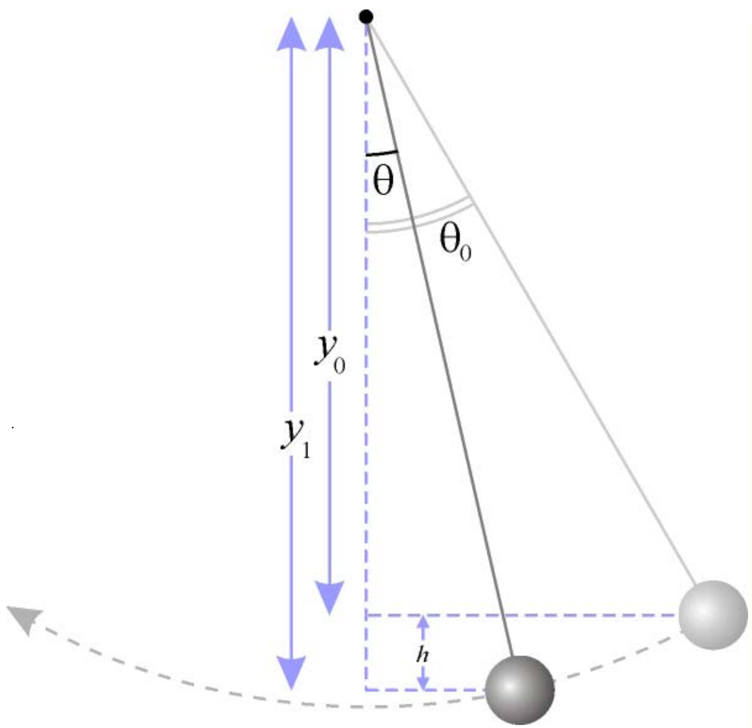


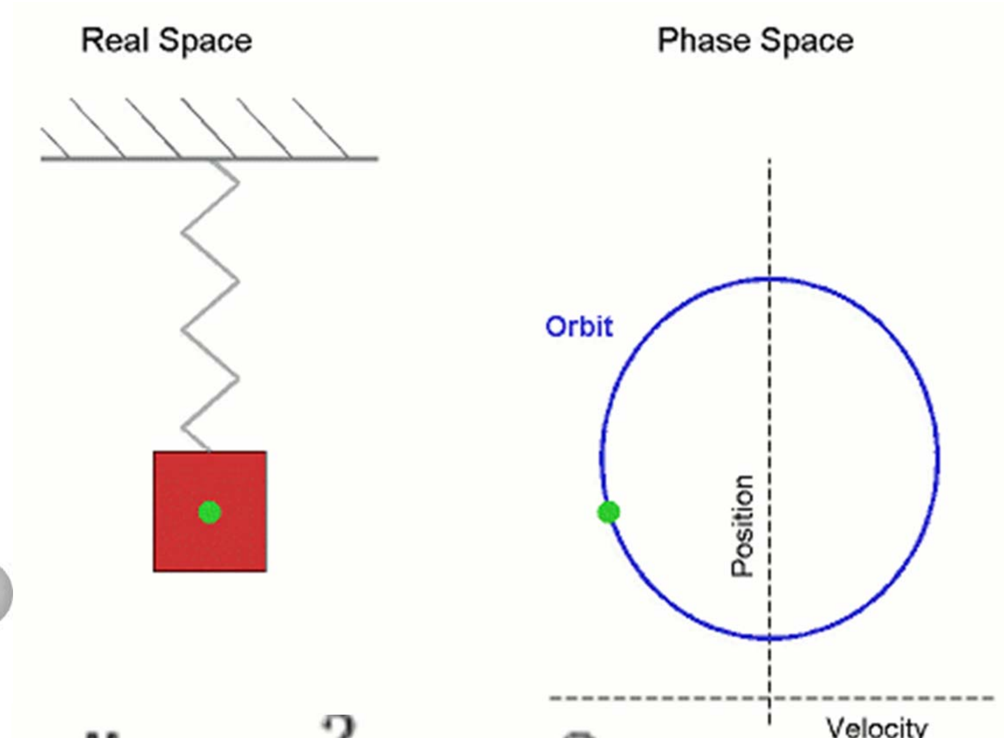
Без трения

С трением

Горка с краями

Гармонический осциллятор

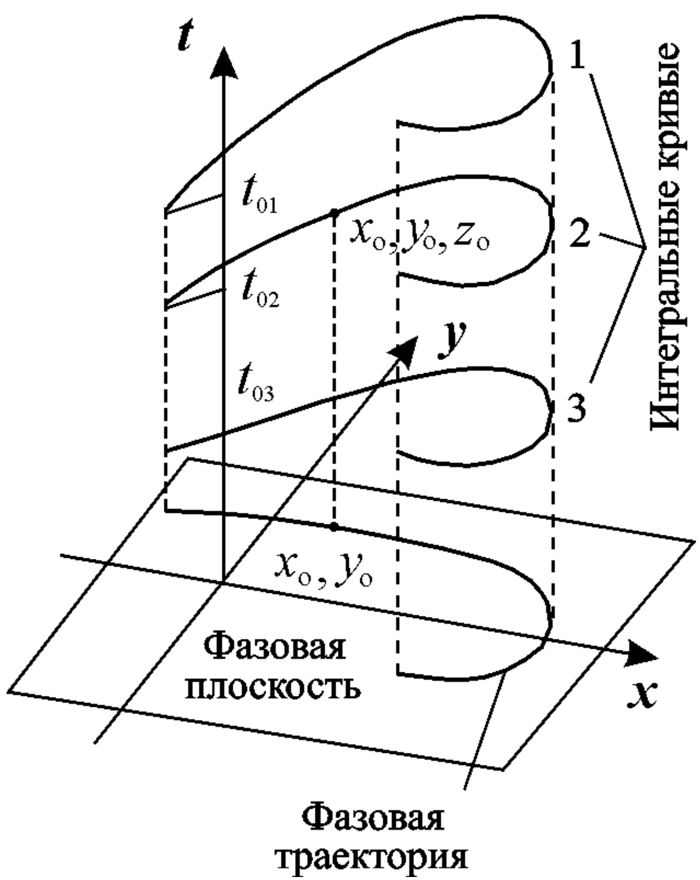




$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

Физикам предлагается рассказать про гармонический осциллятор. Написать модель из двух уравнений (для положения и скорости) и сделать анализ фазового портрета

Траектории системы в пространстве (*x*,*y*,*t*)



Жюль Анри Пуанкаре́
(Jules Henri Poincaré)
1854-1912)

в химии и биологии, политологии, социологии

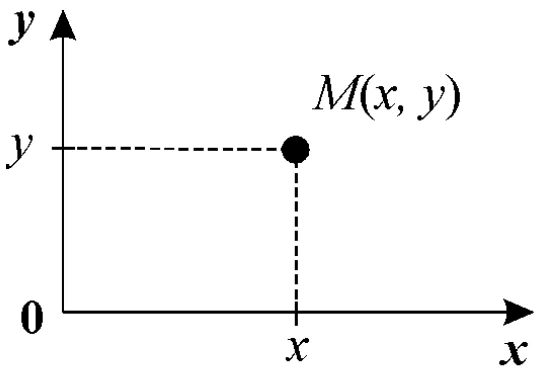
- Фазовые переменные
- – концентрации веществ

- - численности видов животных
- Численности коллективов
- Численность населения стран

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y),$$

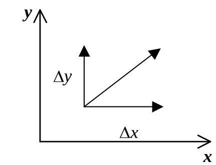
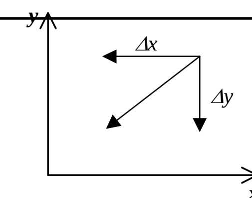
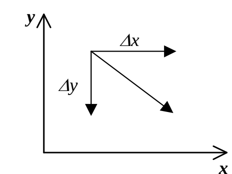
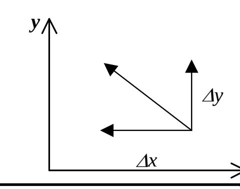
$$\frac{dy}{dt} = Q(x, y).$$

Фазовая траектория – траектория точки $\mathrm{M}(x(t),y(t))$



$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)}}$$

Уравнение фазовой траектории

$P(x, y) > 0,\ Q(x, y) > 0$	
$P(x, y) < 0,\ Q(x, y) < 0$	
$P(x, y) > 0,\ Q(x, y) < 0$	
$P(x, y) < 0,\ Q(x, y) > 0$	

Сражающиеся армии

Переменные -

численности:

$x, \quad y$

Параметры – эффективности: a, b

Раковорская битва (1267)

(Раковор – древнерусское название; Везенбург - немецкое) между рыцарями Тевтонского ордена и войском Северо-запада и Северо-востока Руси.

Численности сражающихся армий

$$\frac{dx}{dt} = -by, \quad \frac{dy}{dt} = -ax$$

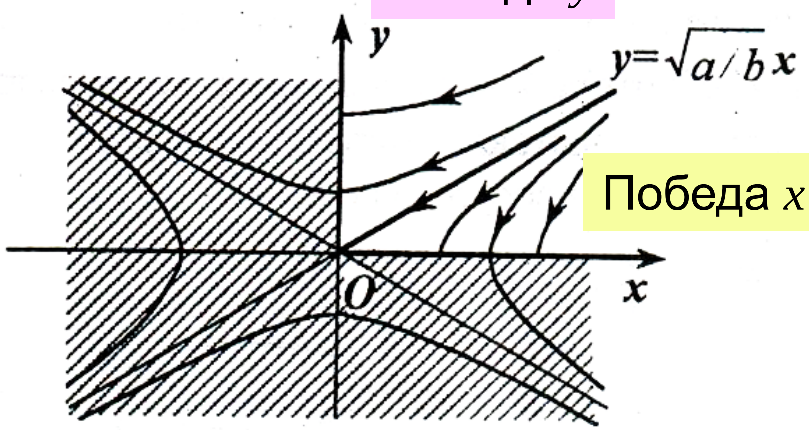
$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax}{by},$$

$$ax\,dx = by\,dy,$$

$$ax^2 - by^2 = ax^2(0) - by^2(0) = Const;$$

$y_0 > \sqrt{\frac{a}{b}}x_0$

Победа y



Победа x

$y_0 < \sqrt{\frac{a}{b}}x_0$

Рис. 1.19. *Фазовый портрет динамики численностей «сражающихся армий»*

Ю.И.Неймарк. Математические модели в естествознании и технике

Чтобы победила армия, начальная численность кот. в 2 раза меньше, нужно, чтобы ее «эффективность» была в 4 раза больше

Математики! Объясните, почему фазовые траектории имеют такой вид

Изоклины

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y),$$
$$\frac{dy}{dt} = Q(x, y).$$

Уравнение изоклин

$$A = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)}$$

В стационарной точке $(\bar{x}, \bar{y})$

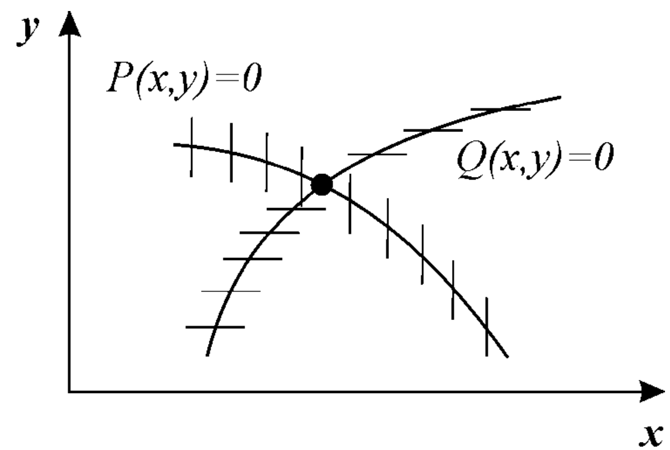
$$P(\bar{x}, \bar{y}) = 0, \quad Q(\bar{x}, \bar{y}) = 0, \qquad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\bar{x},\, y=\bar{y}} = \frac{Q(\bar{x}, \bar{y})}{P(\bar{x}, \bar{y})} = \frac{0}{0}$$

$$\frac{dy}{dt} = 0, \quad Q(x, y) = 0$$

изоклина горизонтальных
касательных

$$\frac{dx}{dt} = 0, \quad P(x, y) = 0$$

Изоклина вертикальных
касательных

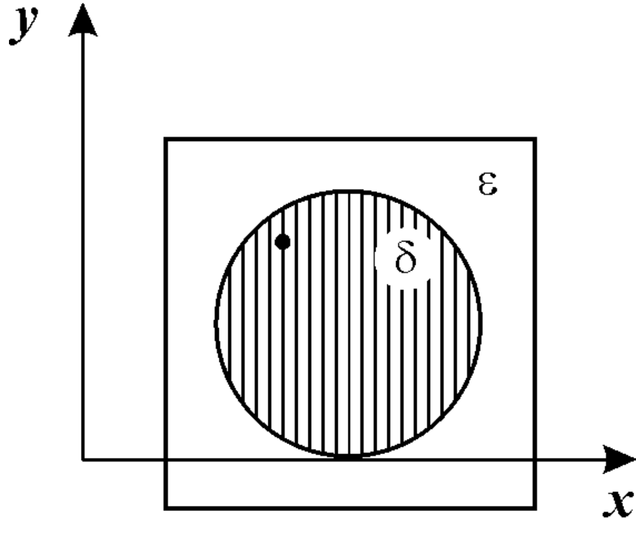


Фазовая плоскость
Качественное исследование

Анализ устойчивости стационарного состояния системы двух автономных дифференциальных уравнений

Определение устойчивости

- *Состояние равновесия устойчиво, если для любой заданной области отклонений от состояния равновесия (ε) можно указать область $\delta(\varepsilon)$, окружающую состояние равновесия и обладающую тем свойством, что ни одна траектория, которая начинается внутри области δ, никогда не достигнет границы ε.*



Устойчивость стационарного состояния

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y),$$
$$\frac{dy}{dt} = Q(x, y).$$

Ляпуно́в Алекса́ндр Миха́йлович (1857 – 1918) – выдающийся русский математик, создал теорию устойчивости состояний равновесия и движения механических систем с конечным числом параметров. Работал также в области дифференциальных уравнений, гидродинамики, теории вероятностей

Линеаризация системы общего вида

$$\frac{dx}{dt}=P(x, y),$$
$$\frac{dy}{dt}=Q(x, y).$$

$$x=\bar{x}+\xi,$$
$$y=\bar{y}+\eta.$$

Разлагаем правые части в ряд Тейлора, оставляем первые члены

$$a=P_x^{\prime}(\bar{x},\bar{y}), \quad b=P_y^{\prime}(\bar{x},\bar{y}),$$
$$c=Q_x^{\prime}(\bar{x},\bar{y}), \quad d=Q_y^{\prime}(\bar{x},\bar{y}).$$

Линеаризованная система

$$\frac{d\xi}{dt}=a\xi+b\eta,$$
$$\frac{d\eta}{dt}=c\xi+d\eta.$$

Исследование устойчивости стационарного состояния для линейной системы

$$\frac{dx}{dt} = ax + by, \quad \frac{dy}{dt} = cx + dy$$

Ищем решение в виде:

$$x = Ae^{\lambda t}, \quad y = Be^{\lambda t}$$

Нетревиальные решения существуют, если

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0$$

Характеристический определитель

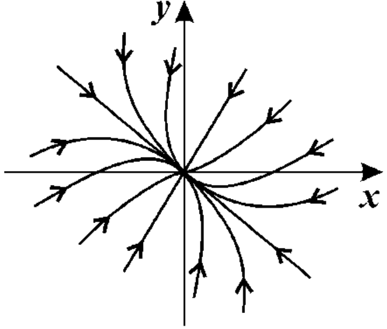
$$\lambda_{1,2} = \frac{a + d}{2} \pm \sqrt{\frac{(a + d)^2 - 4(ad - bc)}{4}}$$

Типы поведения фазовых траекторий вблизи стационарного состояния

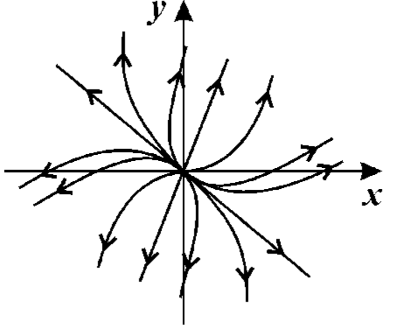
$$\frac{dx}{dt} = ax + by, \quad \frac{dy}{dt} = cx + dy$$

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

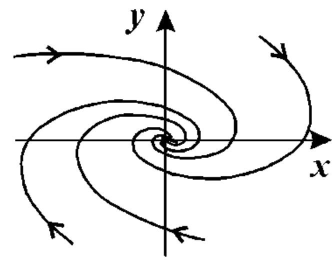
$$\lambda_{1,2} = \frac{a+d}{2} \pm \sqrt{\frac{(a+d)^2 - 4(ad-bc)}{4}}$$



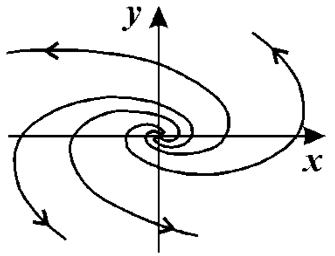
Устойчивый узел.
(λ_1, λ_2 действительны и отрицательны)



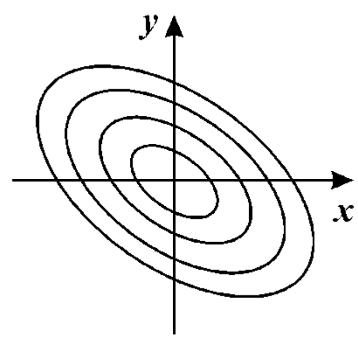
Неустойчивый узел.
(λ_1, λ_2 действительны и положительны)



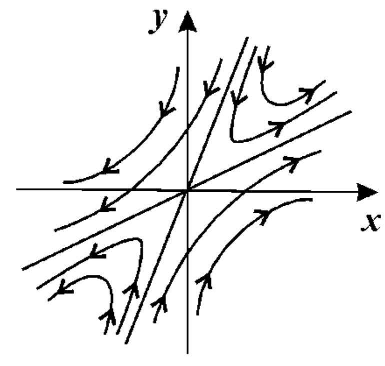
Устойчивый фокус
(λ_1, λ_2 - комплексны, Re $\lambda_{1,2} < 0$)



Неустойчивый фокус
(λ_1, λ_2 - комплексны, Re $\lambda_{1,2} > 0$)



Центр.
(λ_1, λ_2 - чисто мнимые)



Седло.
(λ_1, λ_2 - действительны и разных знаков)

Если *оба корня* имеют ***отрицательную*** *действительную* часть и, следовательно, все решения уравнений первого приближения затухают, то *состояние равновесия* ***устойчиво;***

- если *хотя бы один корень* имеет ***положительную*** *действительную часть*, то есть линеаризованная система имеет нарастающие решения, то *состояние равновесия* ***неустойчиво**.*

- Если *действительные части обоих корней* характеристического уравнения *равны нулю* или если *один корень равен нулю*, *а другой отрицателен*, то *уравнения* (5.8) *не дают ответа* на вопрос об *устойчивости состояния равновесия*, и необходимо *рассматривать члены более высокого порядка малости в разложении в ряд Тейлора правых частей уравнений* (5.6).

Бифуркацонная диаграмма

$$\frac{dx}{dt} = ax + by, \quad \frac{dy}{dt} = cx + dy$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{a+d}{2} \pm \sqrt{\frac{(a+d)^2 - 4(ad-bc)}{4}}$$

$$\sigma = -(a+d); \ \Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 - 4\Delta}}{2}$$