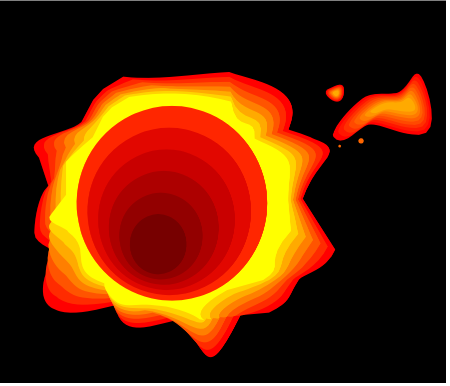
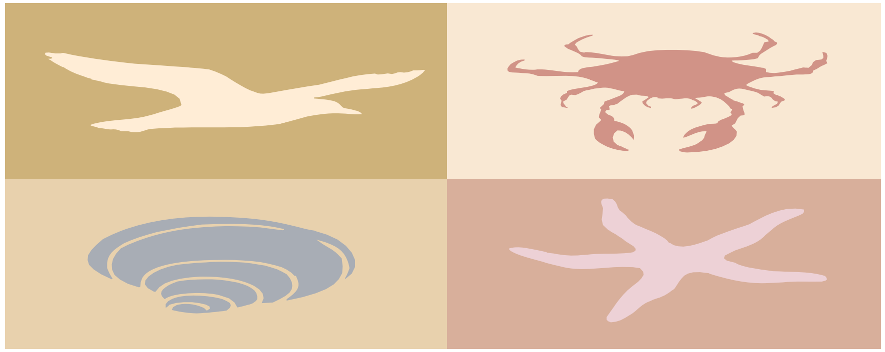
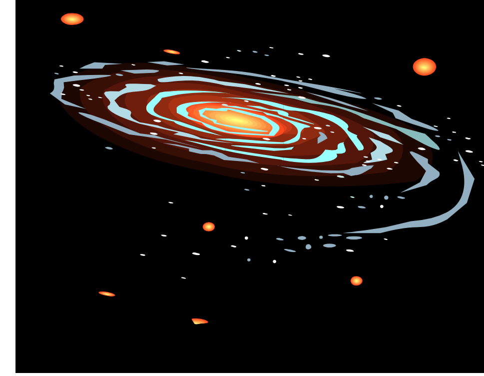






www.biophys.msu.ru

Модели нелинейного мира

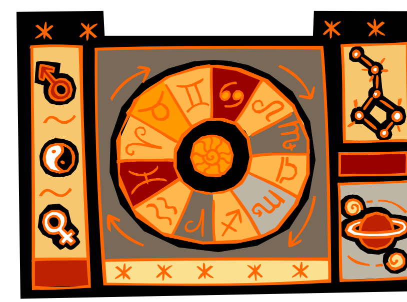
Лекция 5

Галина Юрьевна Ризниченко

Каф. биофизики Биологического ф-та Московского государственного университета им. М.В.Ломоносова, к.119

тел: +7(495)9390289; факс: (495)9391115;

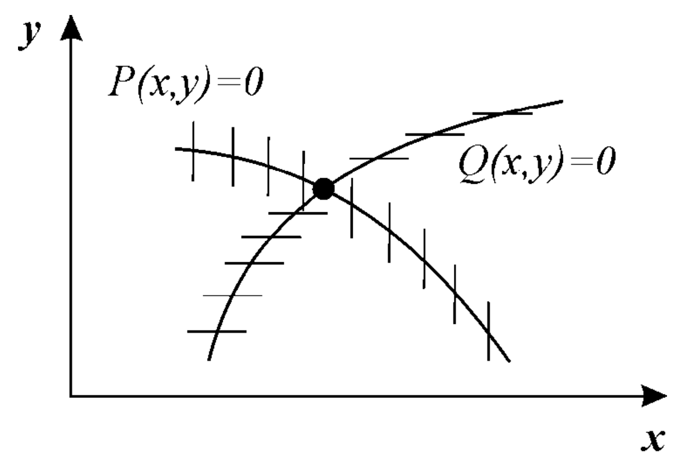
E-mail: riznich@biophys.msu.ru



http://mathbio.professorjournal.ru/mnw

Фазовый портрет 2.

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y),$$
$$\frac{dy}{dt} = Q(x, y).$$



Иерархия времен

Линеаризация системы в окрестности стационарного состояния

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y),$$
$$\frac{dy}{dt} = Q(x, y).$$

$$P(\bar{x}, \bar{y}) = 0,$$
$$Q(\bar{x}, \bar{y}) = 0,$$

$$x = \bar{x} + \xi,$$
$$y = \bar{y} + \eta.$$

$$\frac{d\xi}{dt} = a\xi + b\eta,$$
$$\frac{d\eta}{dt} = c\xi + d\eta.$$

$$a = P_x'(\bar{x}, \bar{y}), \qquad b = P_y'(\bar{x}, \bar{y}),$$
$$c = Q_x'(\bar{x}, \bar{y}), \qquad d = Q_y'(\bar{x}, \bar{y}).$$

Исследование устойчивости стационарного состояния для линейной системы

$$\frac{dx}{dt} = ax + by, \quad \frac{dy}{dt} = cx + dy$$

Ищем решение в виде:

$$x = Ae^{\lambda t}, \quad y = Be^{\lambda t}$$

Нетревиальные решения существуют, если

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc) = 0$$

Характеристический определитель

$$\lambda_{1,2} = \frac{a+d}{2} \pm \sqrt{\frac{(a+d)^2 - 4(ad-bc)}{4}}$$

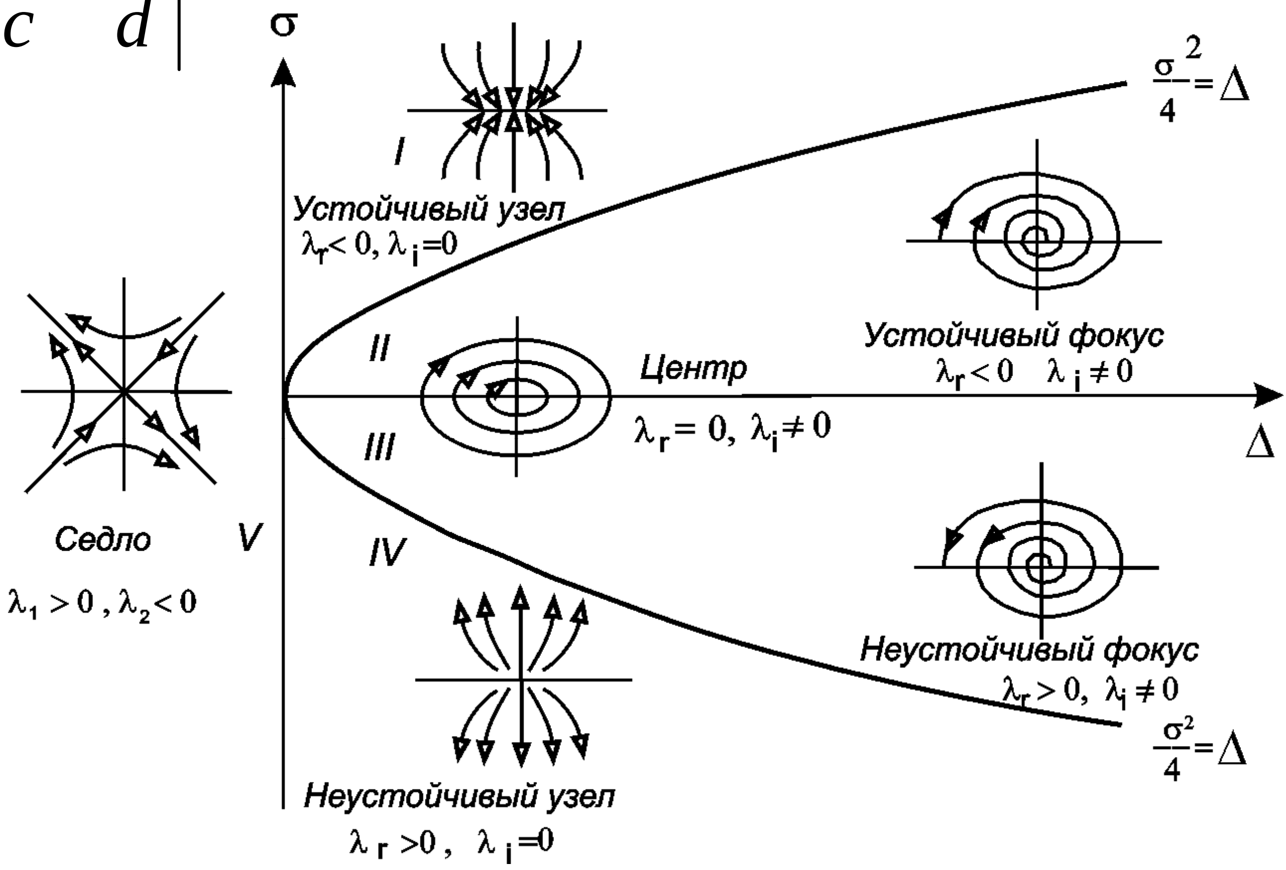
Бифуркацонная диаграмма

$$\frac{dx}{dt} = ax + by, \quad \frac{dy}{dt} = cx + dy$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{a+d}{2} \pm \sqrt{\frac{(a+d)^2 - 4(ad - bc)}{4}}$$

$$\sigma = -(a+d); \; \Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 - 4\Delta}}{2}$$



Линейные химические реакции

$$\xrightarrow{k_1} \mathbf{X} \xrightarrow{k_2} \mathbf{Y} \xrightarrow{k_3}$$

$$\frac{dx}{dt} = k_1 - k_2 x$$

$$\frac{dy}{dt} = k_2 x - k_3 y.$$

Стационарные концентрации:

$$\bar{x} = \frac{k_1}{k_2}; \quad \bar{y} = \frac{k_1}{k_3}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{k_2 x - k_3 y}{k_1 - k_2 x}$$

Уравнение фазовых траекторий

Линейные химические реакции. Фазовый портрет

$$\xrightarrow{k_1} \mathbf{X} \xrightarrow{k_2} \mathbf{Y} \xrightarrow{k_3}$$

$$\frac{dx}{dt} = k_1 - k_2 x$$

$$\frac{dy}{dt} = k_2 x - k_3 y.$$

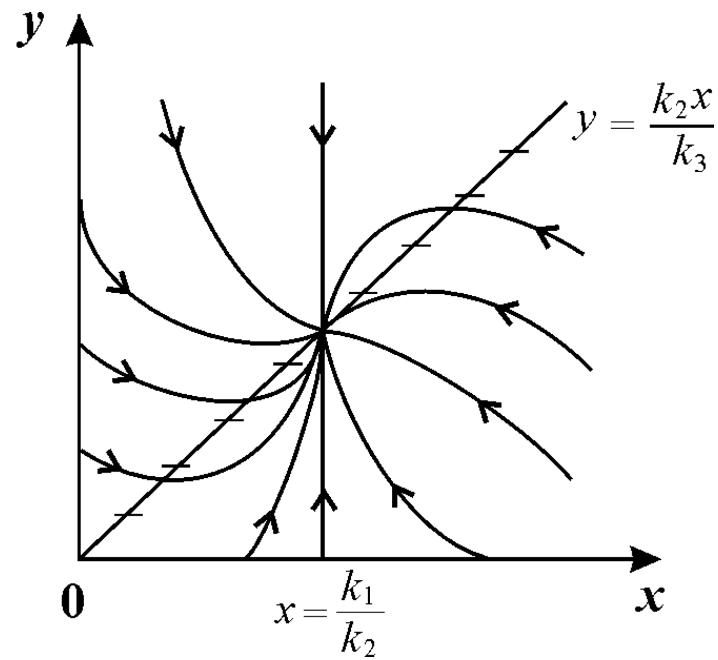
$$\frac{dy}{dx} = \frac{k_2 x - k_3 y}{k_1 - k_2 x}$$

Изоклина горизонтальных касательных

$$\frac{dy}{dx} = 0,\ y = \frac{k_2 x}{k_3}.$$

Изоклина вертикальных касательных

$$\frac{dy}{dx} = \infty,\ \ x = \frac{k_1}{k_2}.$$



под каким углом пересекаются координатные оси интегральными кривыми.

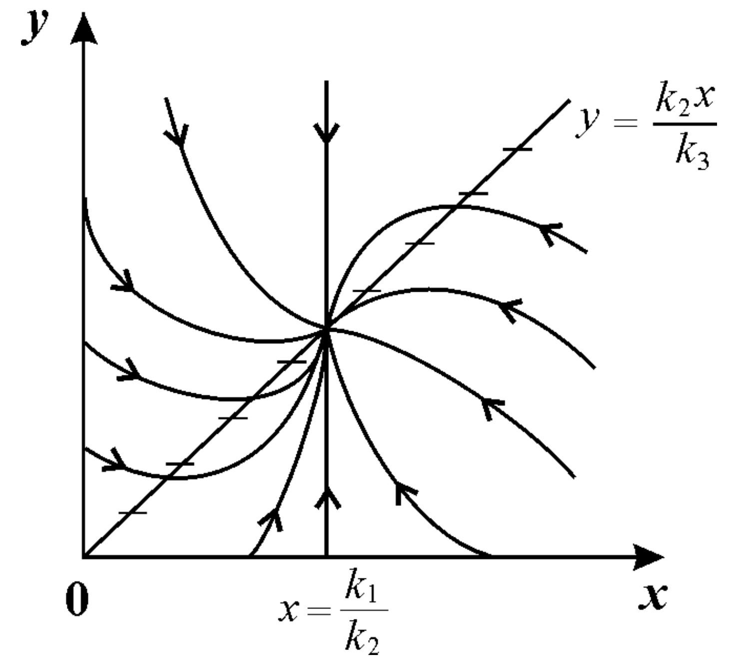
Если x = 0, то $\frac{dy}{dx} = -\frac{k_3}{k_1} y$

Если y=0, то $\frac{dy}{dx} = \frac{k_2 x}{k_1 - k_2 x}$

Линейные химические реакции. Устойчивость стац. состояния

$$\xrightarrow{k_1} \mathbf{X} \xrightarrow{k_2} \mathbf{Y} \xrightarrow{k_3}$$

$$\frac{dx}{dt} = k_1 - k_2 x$$
$$\frac{dy}{dt} = k_2 x - k_3 y.$$



$$\begin{vmatrix} -k_2 - \lambda & 0 \\ k_2 & -k_3 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(k_2 + \lambda)(k_3 + \lambda) = 0$$

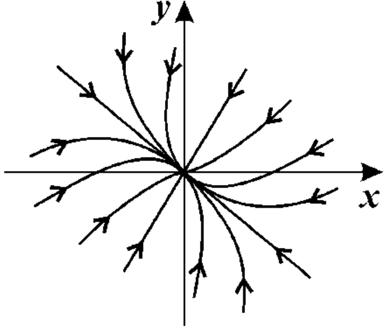
$$\lambda_1 = -k_2, \qquad \lambda_2 = -k_3.$$

Типы поведения фазовых траекторий вблизи стационарного состояния

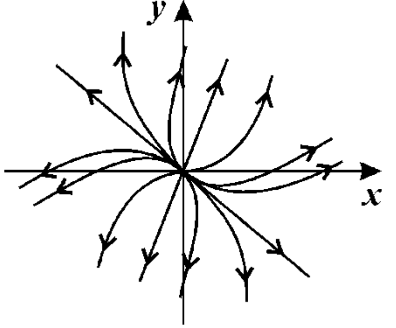
$$\frac{dx}{dt} = ax + by, \quad \frac{dy}{dt} = cx + dy$$

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

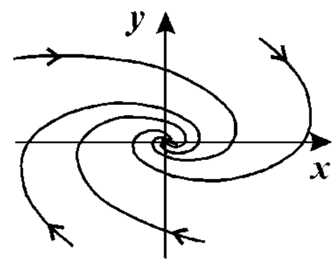
$$\lambda_{1,2} = \frac{a+d}{2} \pm \sqrt{\frac{(a+d)^2 - 4(ad-bc)}{4}}$$



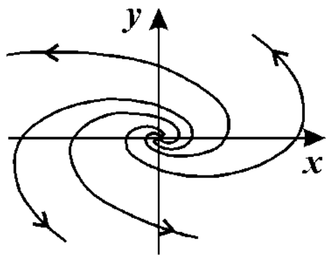
Устойчивый узел.
(λ_1, λ_2 действительны и отрицательны)



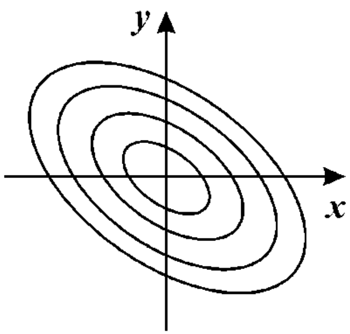
Неустойчивый узел.
(λ_1, λ_2 действительны и положительны)



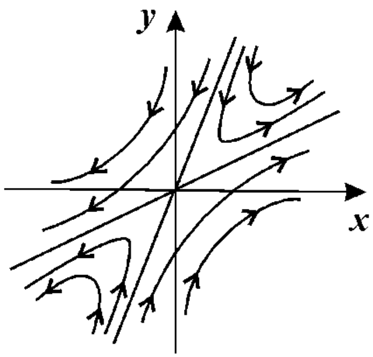
Устойчивый фокус
(λ_1, λ_2 - комплексны, Re $\lambda_{1,2} < 0$)



Неустойчивый фокус
(λ_1, λ_2 - комплексны, Re $\lambda_{1,2} > 0$)



Центр.
(λ_1, λ_2 - чисто мнимые)



Седло.
(λ_1, λ_2 - действительны и разных знаков)

Кинетические уравнения Лотки (A.J. Lotka. Elements of Physical Biology, 1925)

$$k_0 \qquad k_1 \leftarrow k_2$$

$$\longrightarrow \mathrm{A} \longrightarrow \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{Y} \longrightarrow \mathrm{B}$$

$$\frac{dx}{dt} = k_0 - k_1 xy,$$

$$\frac{dy}{dt} = k_1 xy - k_2 y,$$

$$\frac{dB}{dt} = k_2 y.$$

Лотка Альфред Джеймс (англ. *Alfred James Lotka*), 1880 –1949 – американский математик, физик, статистик, демограф. Разработал модели простейших физико-химических реакций. Изучал процесс смены поколений, анализировал процесс демографического развития семьи, заложил основы экономической демографии

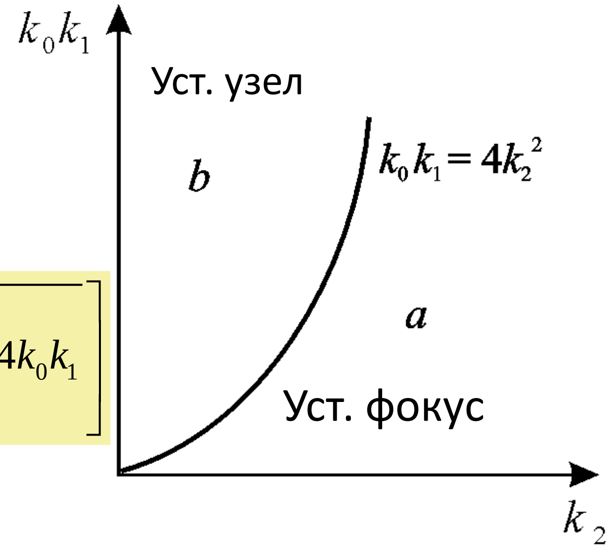
Фазовый портрет системы Лотки

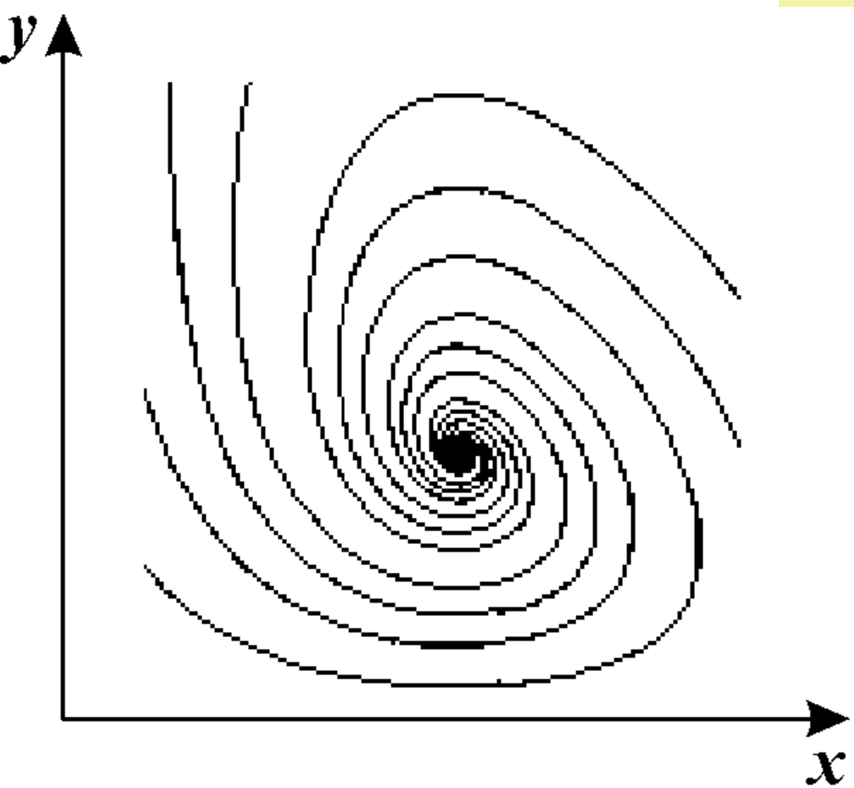
а – устойчивый фокус,

б – устойчивый узел.

$$\frac{dx}{dt} = k_0 - k_1 xy,$$
$$\frac{dy}{dt} = k_1 xy - k_2 y.$$

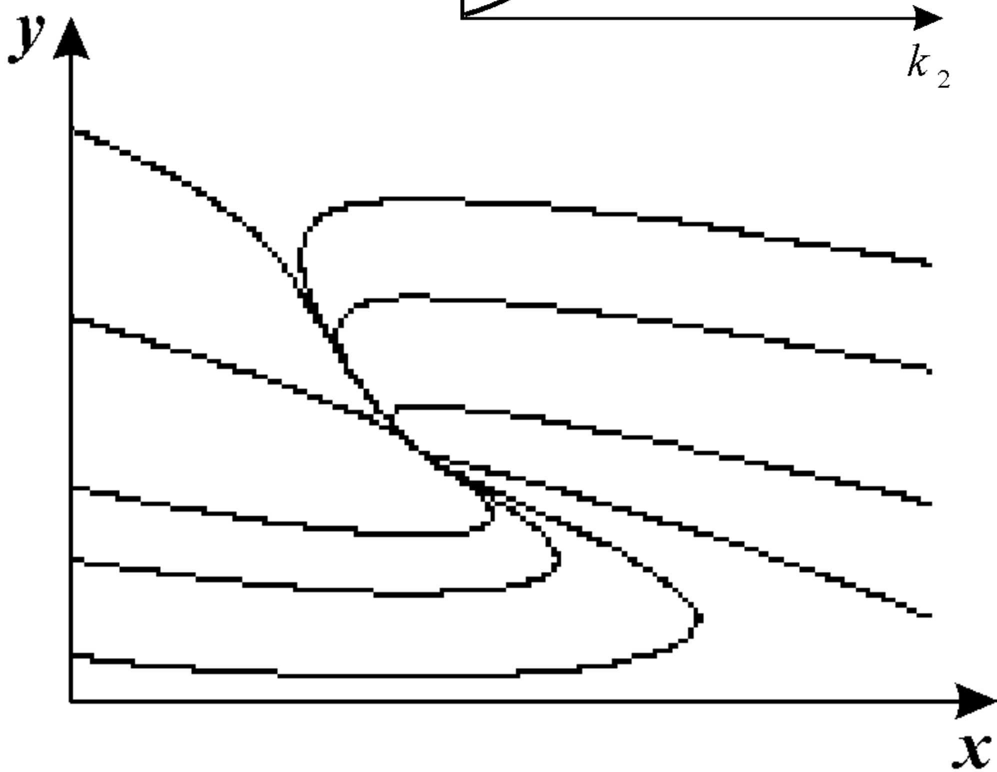
$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2}\left[\frac{k_1 k_0}{k_2} \pm \sqrt{\left(\frac{k_1 k_0}{k_2}\right)^2 - 4k_0 k_1}\right]$$





а

$k_0 = 2, \quad k_1 = 2, \quad k_2 = 2.$



б

$k_0 = 2, \quad k_1 = 10, \quad k_2 = 4.$

Vito Volterra

Модель Вольтерра

$$\frac{dx}{dt} = x(\alpha - \beta y),$$

$$\frac{dy}{dt} = -y(\gamma - \delta x).$$

X – численность жертв

Y – численность хищников

Вольтерра Вито (1860 —1940) — выдающийся итальянский математик и физик. Работал в области дифференциальных уравнений с частными производными, теории упругости, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений, функционального анализа. Основатель математической теории популяций.