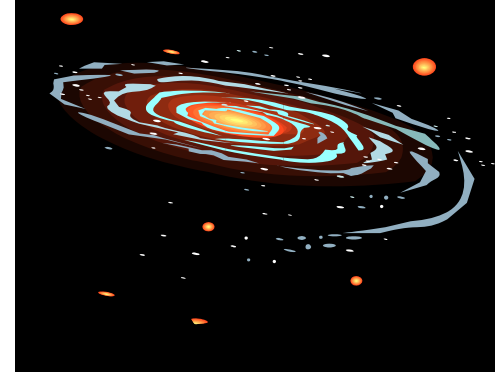
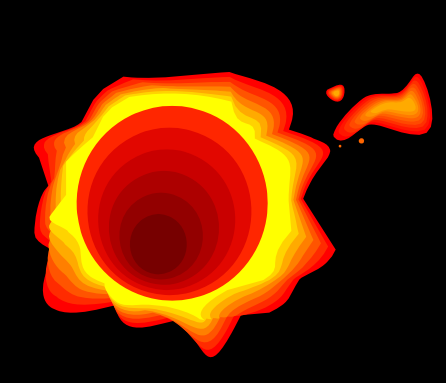




www.biophys.msu.ru

Модели нелинейного мира

Лекция 10

Галина Юрьевна Ризниченко

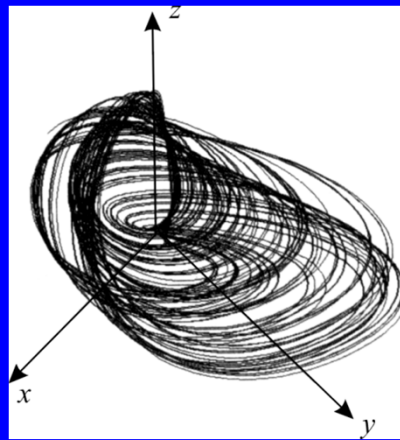
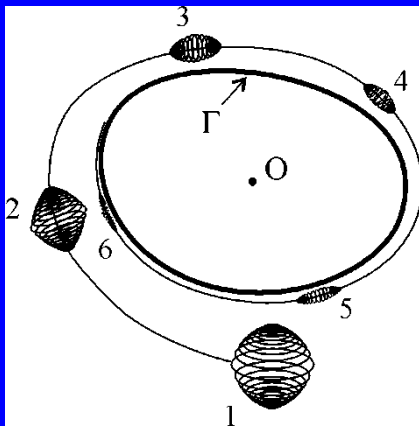
Каф. биофизики Биологического ф-та Московского
государственного университета им.
М.В.Ломоносова, к.119

тел: +7(495)9390289; факс: (495)9391115;

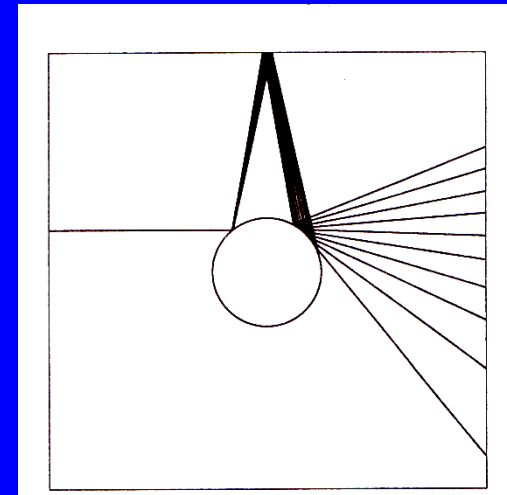
E-mail: riznich@biophys.msu.ru



<http://mathbio.professorjournal.ru/mnw>



Г.Ю Ризниченко



Динамический хаос

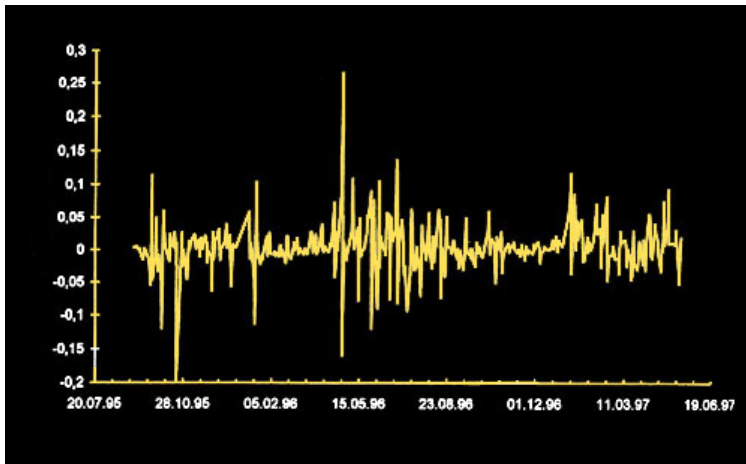


Фото Роберта Гендлера. Созвездие стрельца



- Бесформенная совокупность материи и пространства (Противоположно Космосу – упорядоченности). Все рождается из Хаоса (древнегреческое).
- Беспорядок, неразбериха, смешение. Значение появилось в ранне-христианские времена

Потребность в
определенности —
естественная биологическая
потребность человека,
но она же — порок мышления



Динамика биржевых индексов

Мы живем не в
Среднестане, а в
Крайнестане

Нассим
Николас
Талеб

Черный лебедь



Под знаком непредсказуемости

М., Колибри
2009

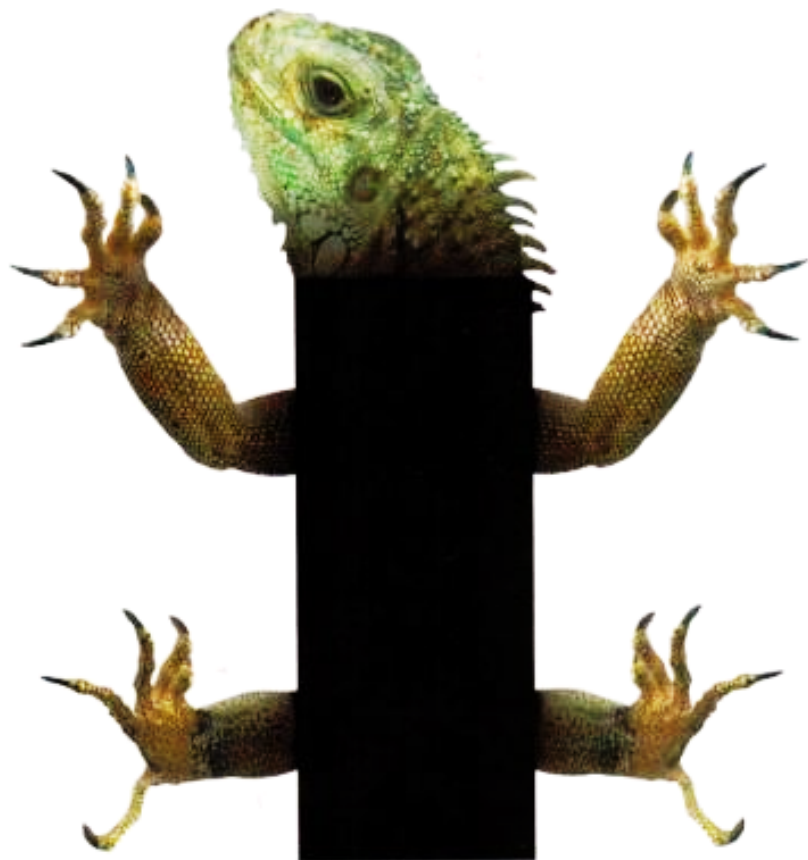
The Black Swan
2007

Ниссим Николас Талеб

- Некоторые думают , что я призываю не строить прогнозов и не пользоваться моделями. На самом деле я говорю: «не пользуйтесь линейными прогнозами при опасности колоссальных погрешностей...

Нассим
Николас
Талеб

О секретах устойчивости



По следам «Черного лебедя»

Динамический хаос. Основные понятия

- *Основные понятия теории динамических систем.*
- *Предельные множества. Аттракторы.*
- *Странные аттракторы. Динамический хаос.*
- *Размерность странных аттракторов.
Фракталы*

χαος

CHAOS



Александр
Юрьевич
Лоскутов
1960-2011

Weather

Э.Лоренц



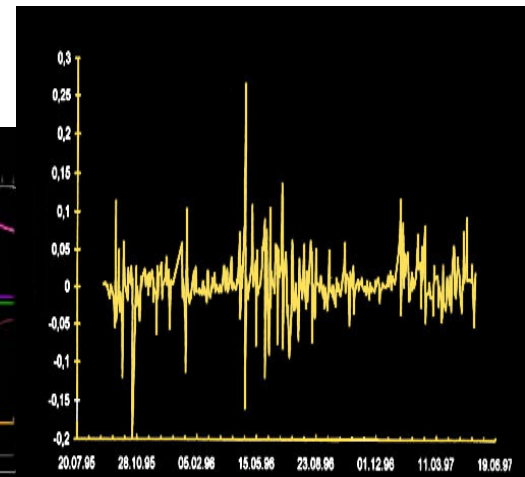
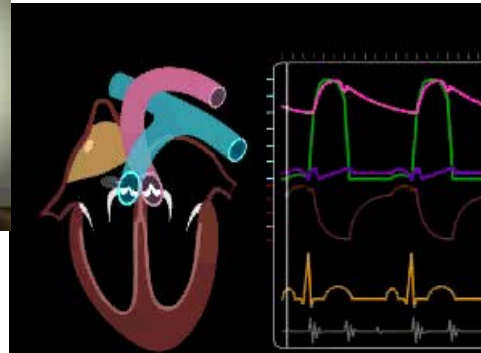
Chemical
Kinetics



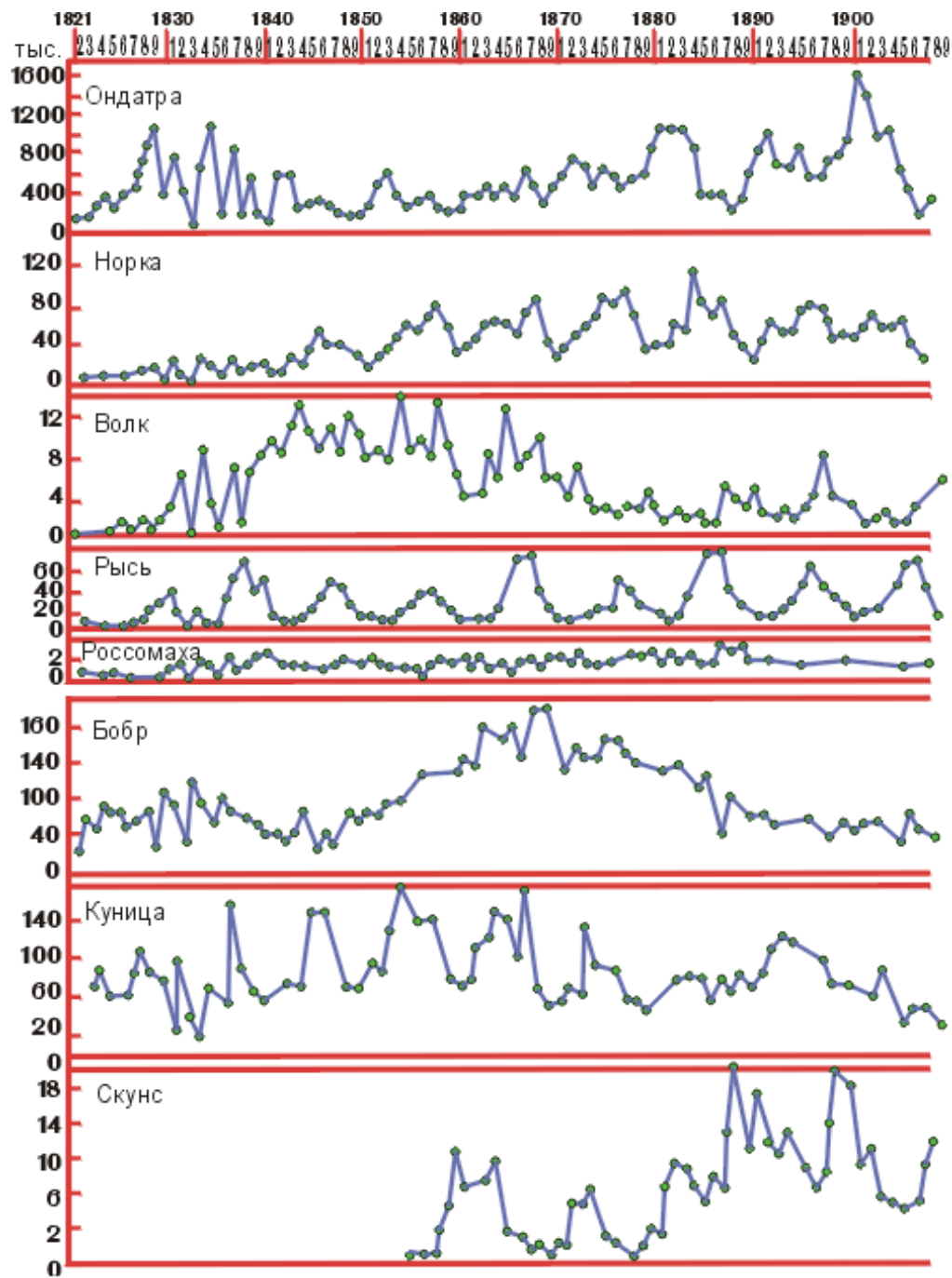
BZ-reaction

Белоусов и
Жаботинский

Heart rhythm

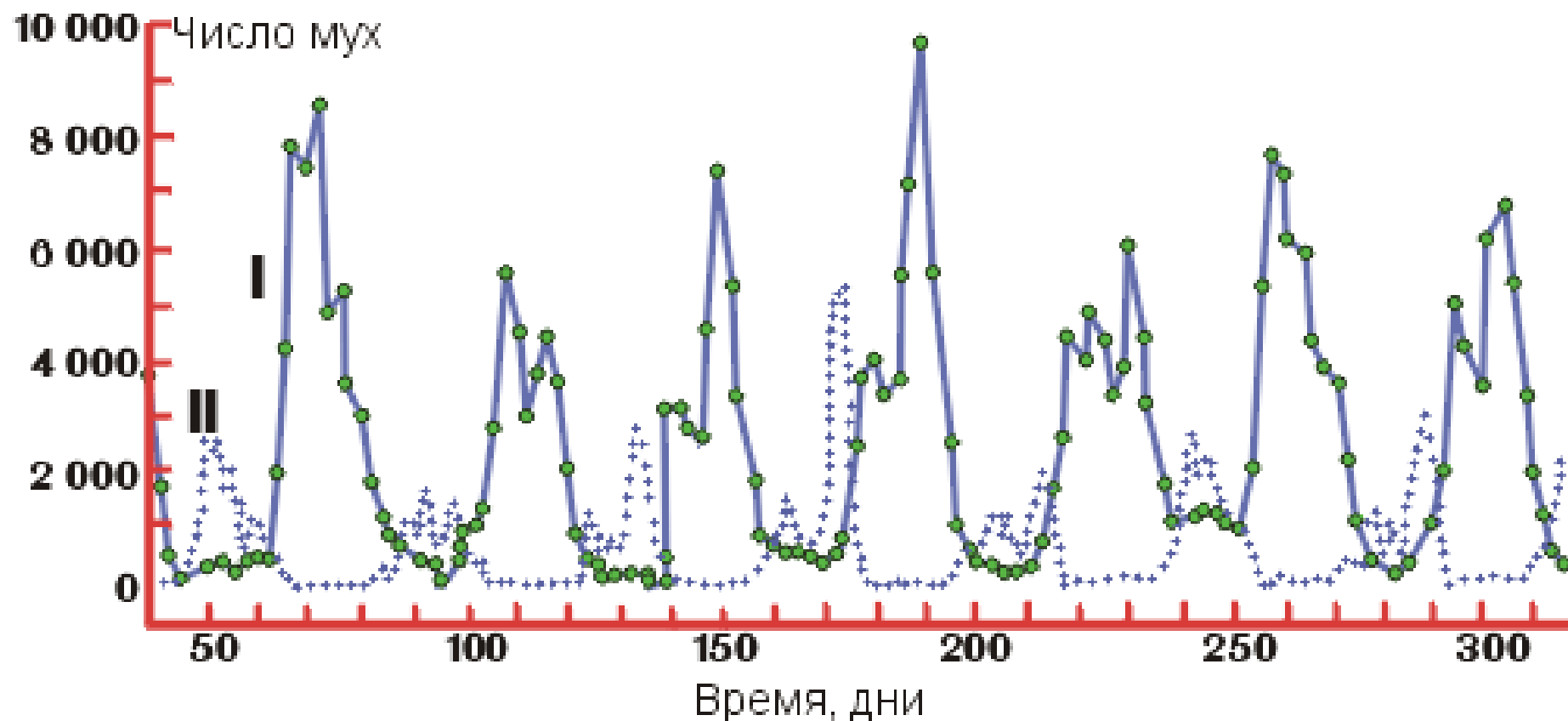


Биржевые
индексы



Данные по
заготовкам
пушнины
компании
Гудзонова
Залива

Динамика численности плодовой мушки



Анри Пуанкаре —

великий французский математик
в книге «Наука и метод» в 1908 г. писал:

«В неустойчивых системах
совершенно ничтожная причина,
ускользающая от нас по своей
малости, вызывает значительные
действия, которые мы не в
состоянии предугадать...
Предсказание становится
невозможным, мы имеем перед
собой явление случайное».



Лоренц

Lorenz EN (1963)

Deterministic non-periodic
flow. J.Atmos. Sci: 20, 131-141

Конвекция в подогреваемом снизу слое жидкости,
модель водяного колеса, одномодовый лазер, диссипативный
осциллятор с инерционным возбуждением

$$\dot{x} = \sigma y - \sigma x,$$

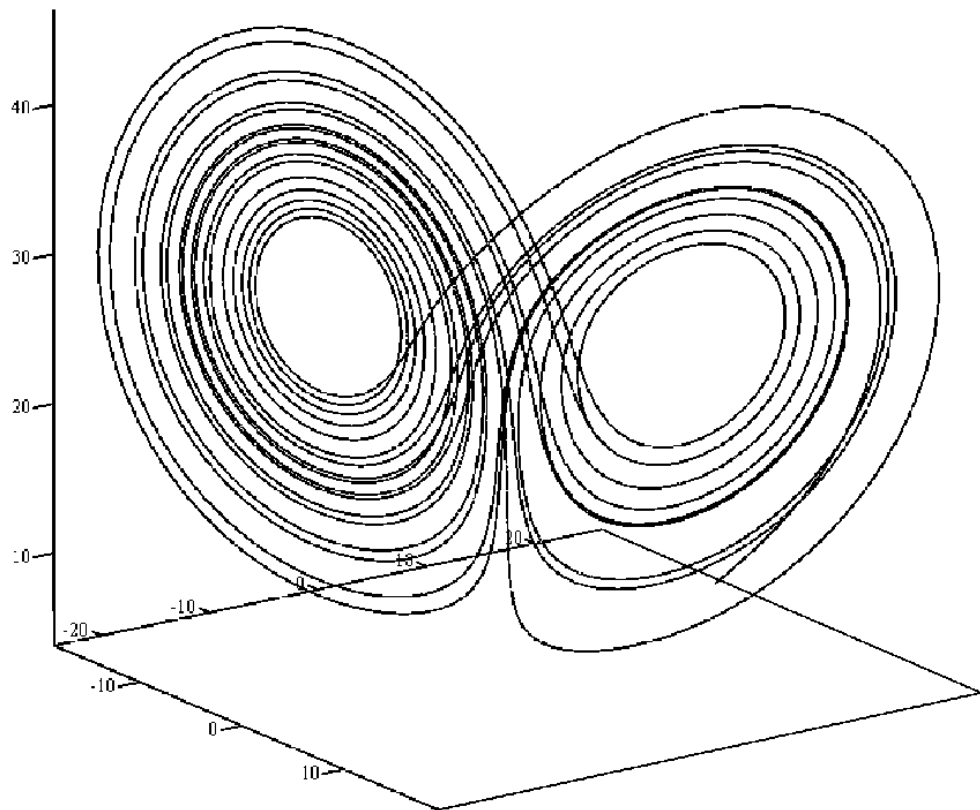
$$\dot{y} = rx - y - xz,$$

$$\dot{z} = xy - bz.$$

$$r=28, s=10,$$

$$b=8/3$$

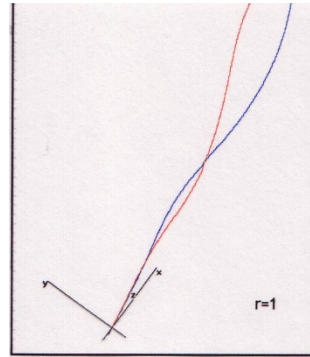
Хаотические траектории в
системе Лоренца



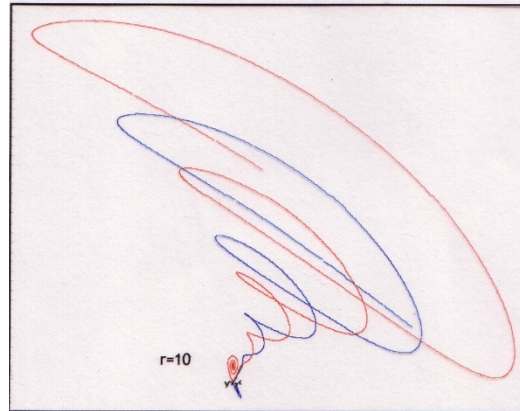
Игорь Федик
каф. биофизики

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma y - \sigma x, \\ \dot{y} &= rx - y - xz, \\ \dot{z} &= xy - bz.\end{aligned}$$

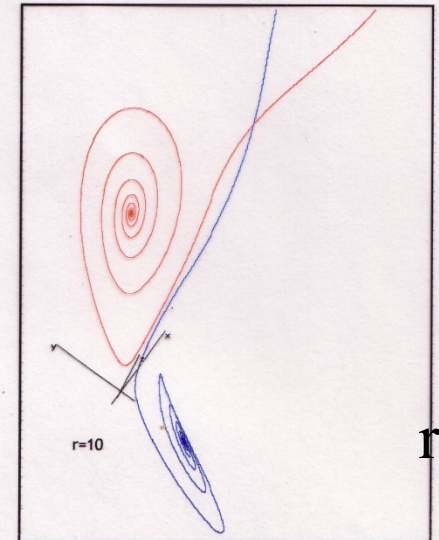
Траектории
системы
Лоренца при
разных
значениях
параметра
 r



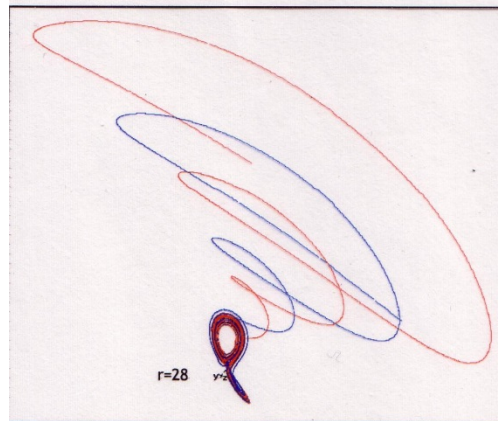
$r=1$



$r=10$

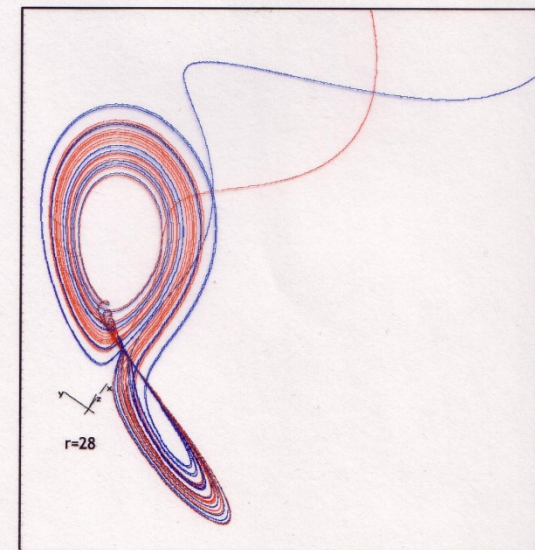


$r=10$



$r=28$

$r=28$



$r=28$

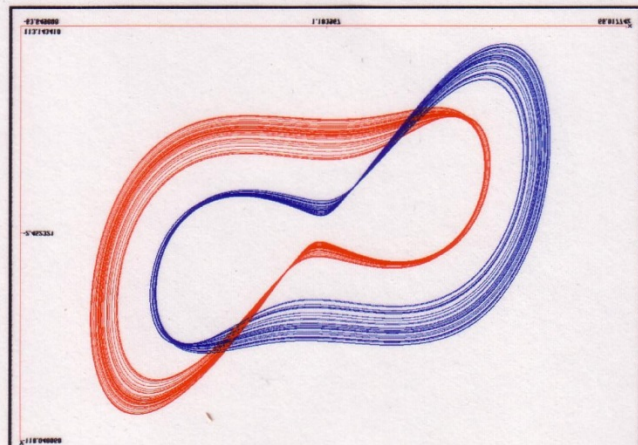
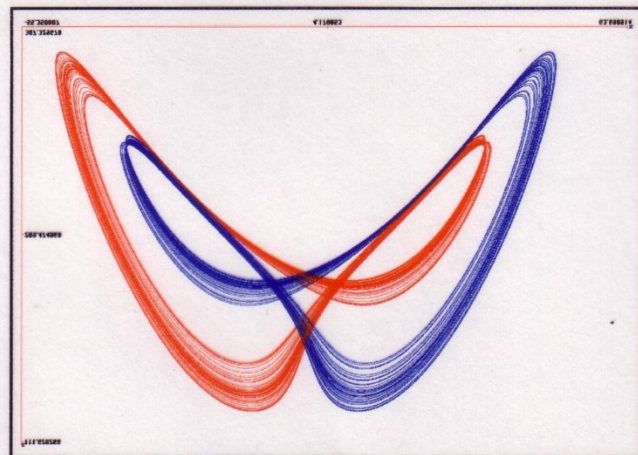
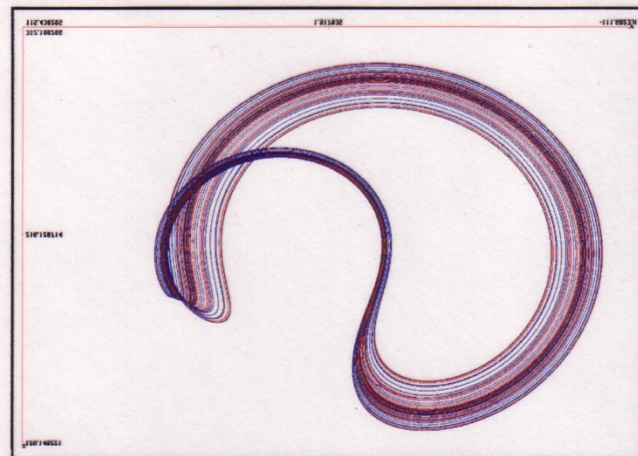
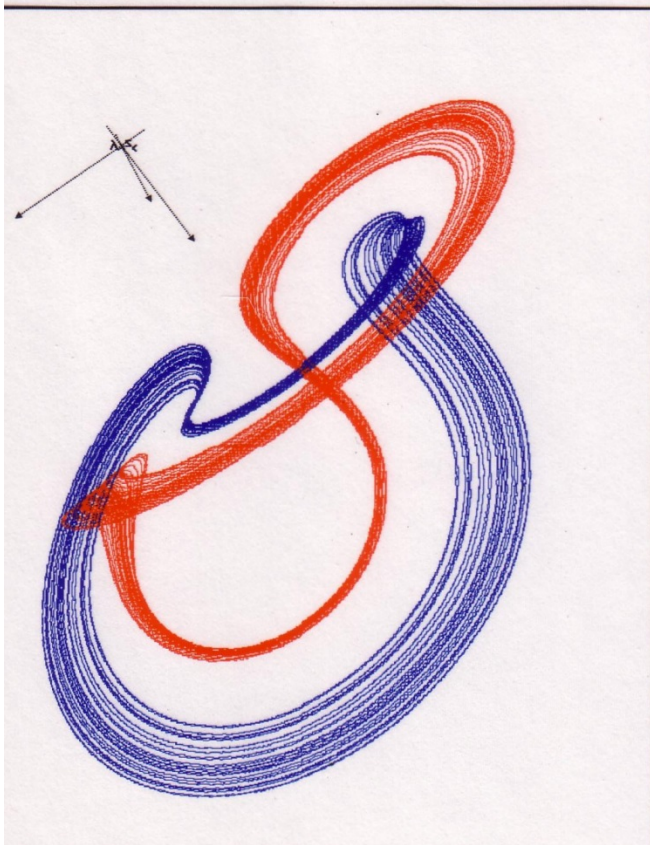
Система Лоренца 1



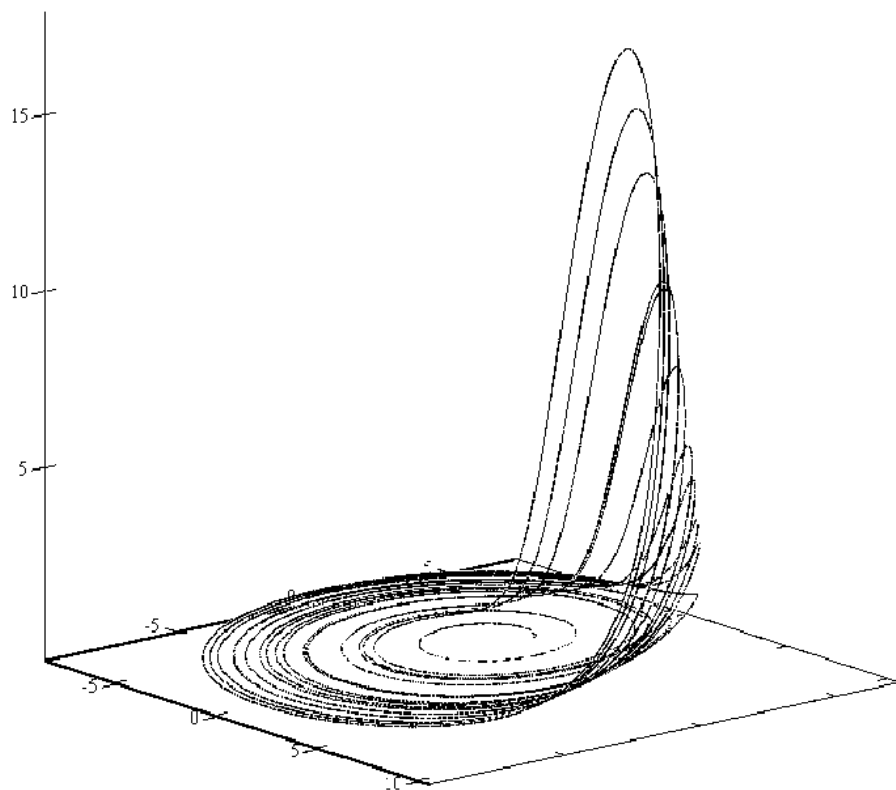
Edward Norton
Lorenz
1917-2008
Американский
математик и
метеоролог
Один из основателей
теории хаоса

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma y - \sigma x, \\ \dot{y} &= rx - y - xz, \\ \dot{z} &= xy - bz.\end{aligned}$$

$$r=28, s=10, b=8/3$$



Хаос в непрерывной системе. Аттрактор Ресслера



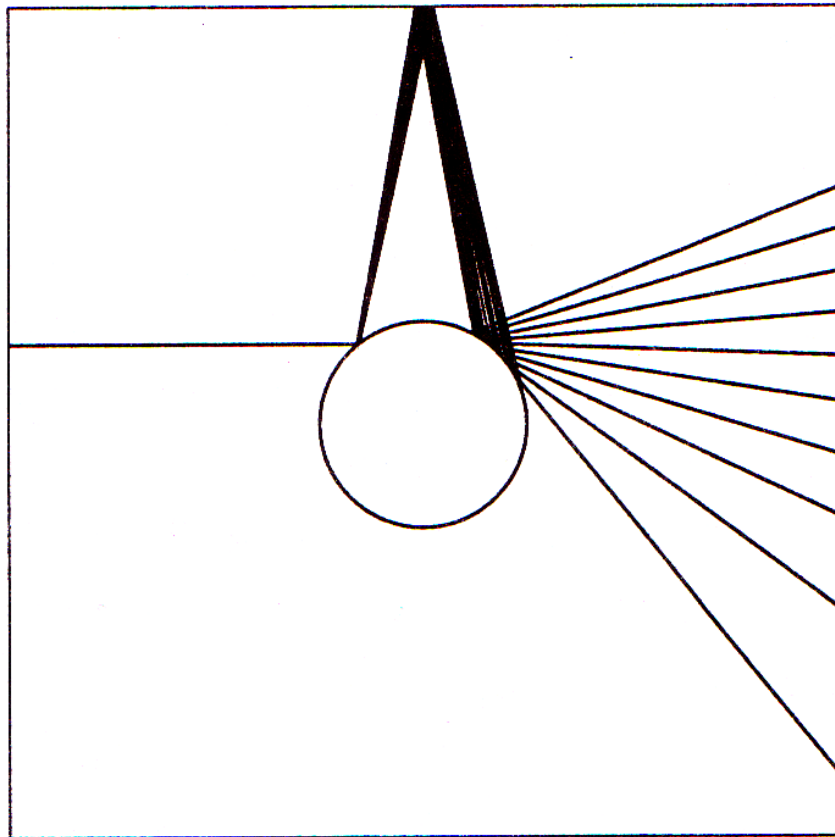
$$\begin{aligned}\dot{x} &= -(x + y), \\ \dot{y} &= x + \alpha y, \\ \dot{z} &= \alpha + z(x - \mu).\end{aligned}$$

Хаотическое поведение возникает

- ☐ ● не из-за внешних источников шума (их нет в системе Лоренца);
- ☐ ● не из-за бесконечного количества степеней свободы (их три в системе Лоренца);
- ☐ ● не из-за неопределенности, связанной с квантовой механикой (рассматриваемые системы чисто классические).

Настоящая причина нерегулярности определяется свойством нелинейных систем экспоненциально быстро разводить первоначально близкие траектории в ограниченной области фазового пространства

Разбегание траекторий



Из книги «Черный лебедь»

Хаотическое поведение означает

- *неустойчивость фазовых траекторий,*
- *рост малого начального возмущения во времени,*
- *перемешивание элементов фазового объема, и, как следствие,*
- *непредсказуемость поведения системы на больших временах*

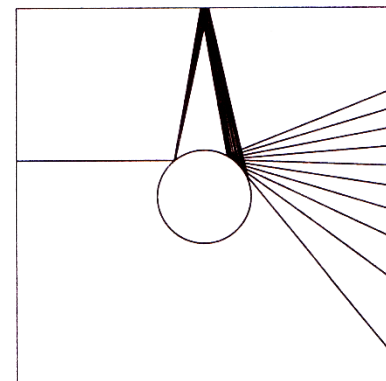
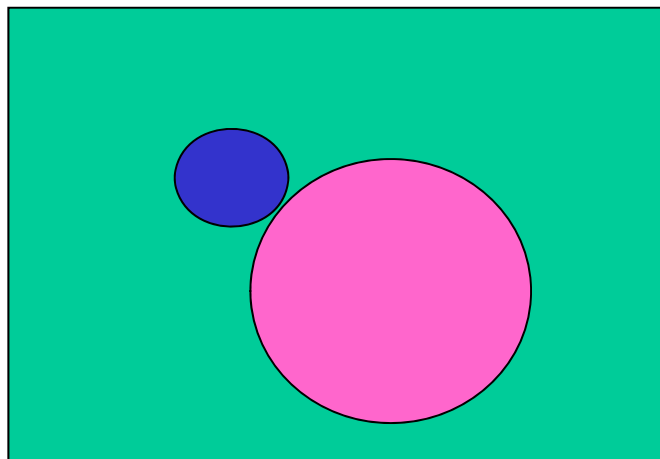
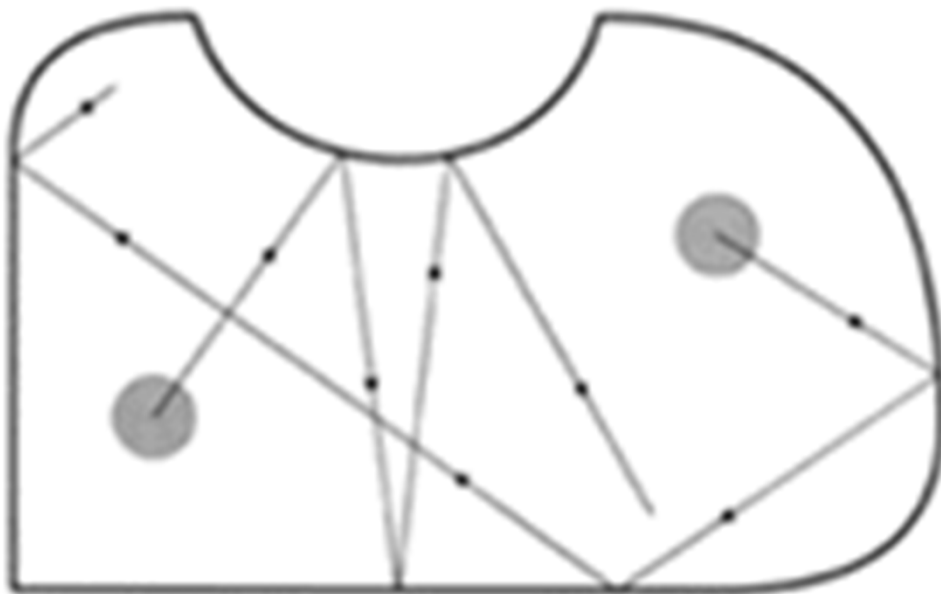


Яков Григорьевич
Синай

Лауреат Абелевской
премии март 2014 г.

Профессор Мехмата МГУ.
Работы по теории
динамических систем,
статистической физике

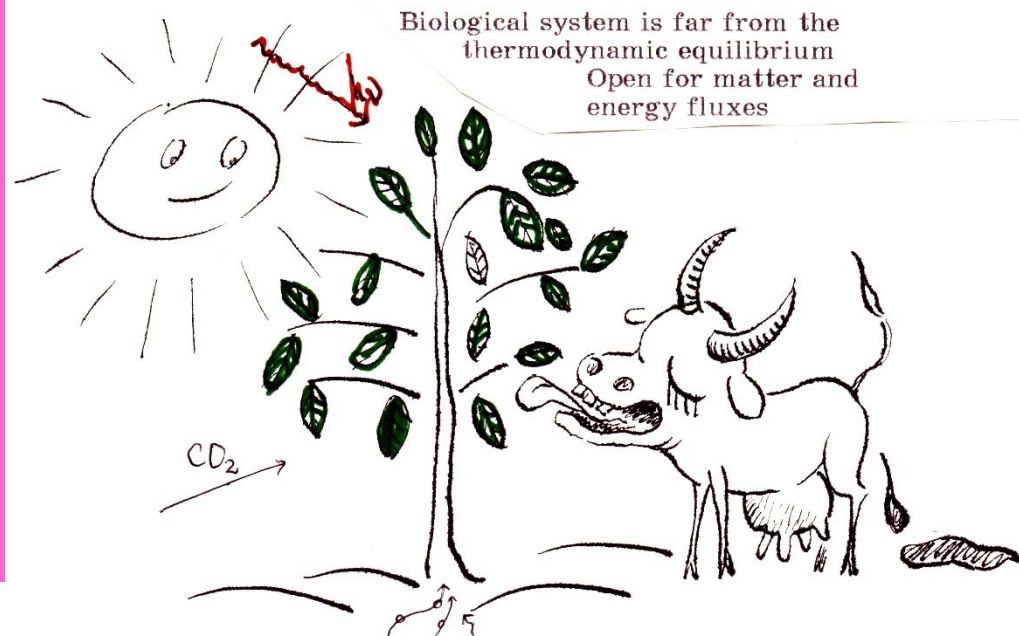
Биллиард Синая



НЕЛИНЕЙНОСТЬ

- является необходимым (но не достаточным) условием существования динамического (детерминированного) хаоса

Линейные дифференциальные и разностные уравнения не приводят к хаосу.



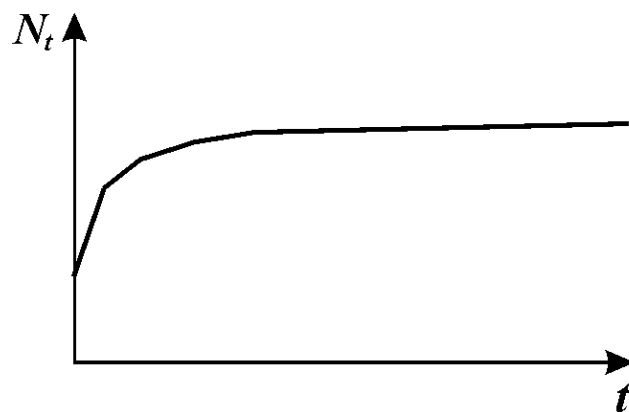
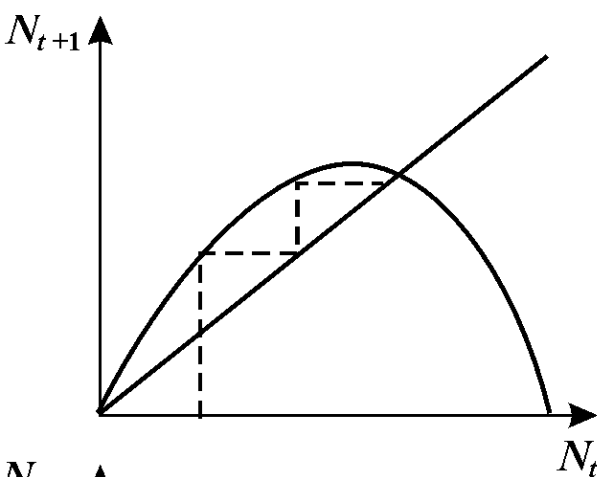
Детерминированные системы

однозначно задан закон изменения системы с течением времени.

Детерминированность означает, что зависимость будущего состояния $x(t)$ можно записать в виде:

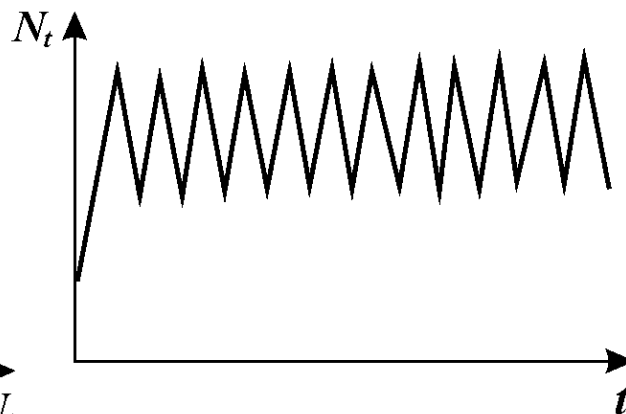
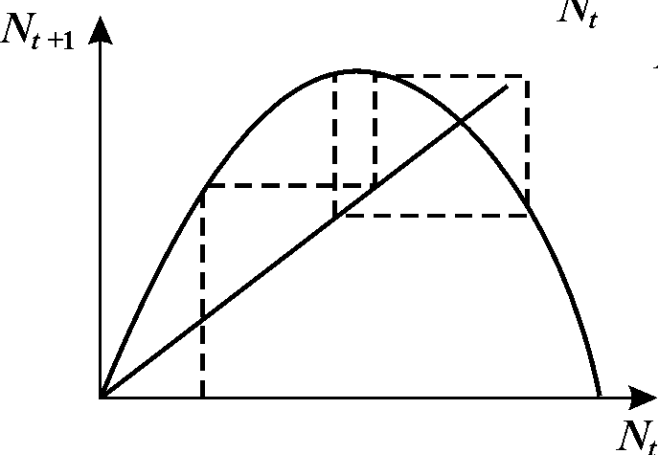
$$x(t) = F [x(t_0)] .$$

Здесь F – детерминированный закон (оператор), который осуществляет строго однозначное преобразование начального состояния $x(t_0)$ в будущее состояние $x(t)$ для любого $t > t_0$.

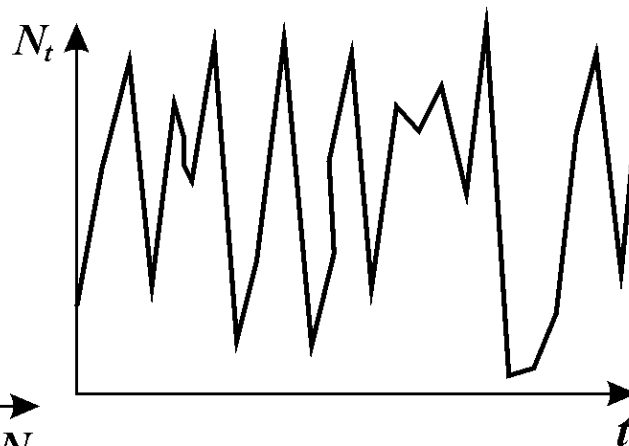
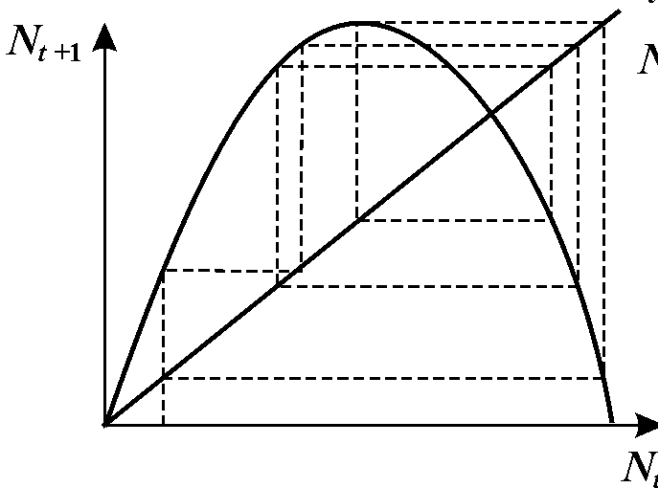


a Квадратичное
отображение

$$N_{t+1} = aN_t(1-N_t)$$



б

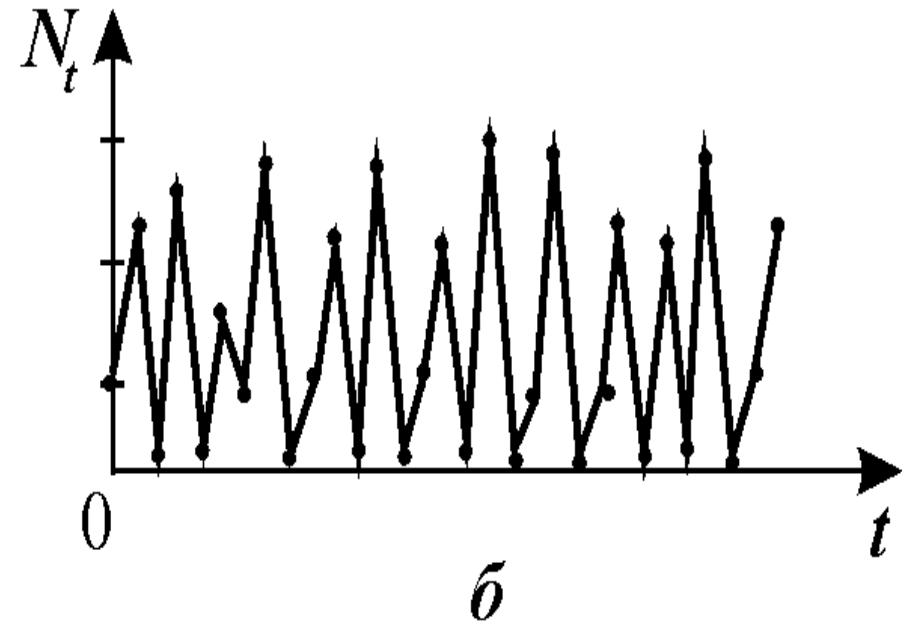
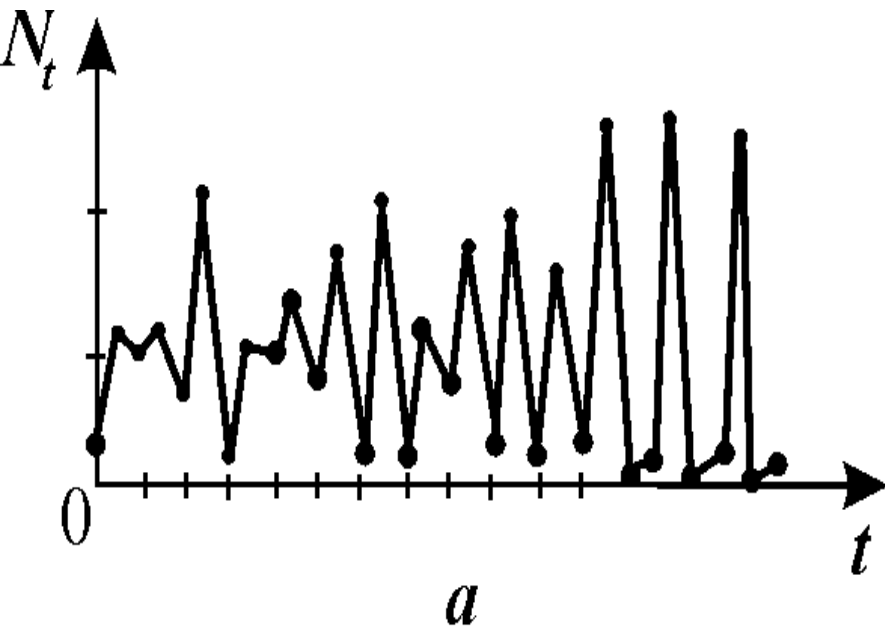


в

Пример
детерминиро-
ванного
хаоса

$$N_{t+1} = N_t \exp\left\{r\left(1 - \frac{N_t}{K}\right)\right\}$$

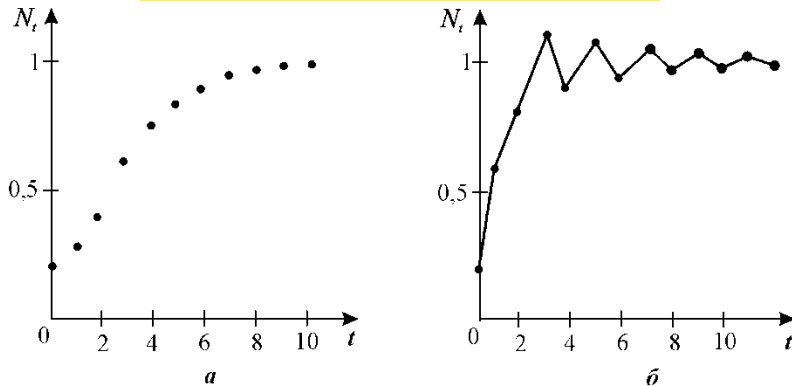
Дискретный аналог
логистического уравнения



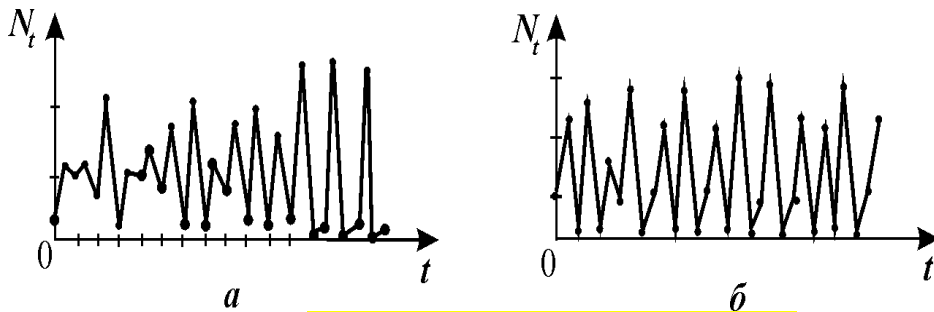
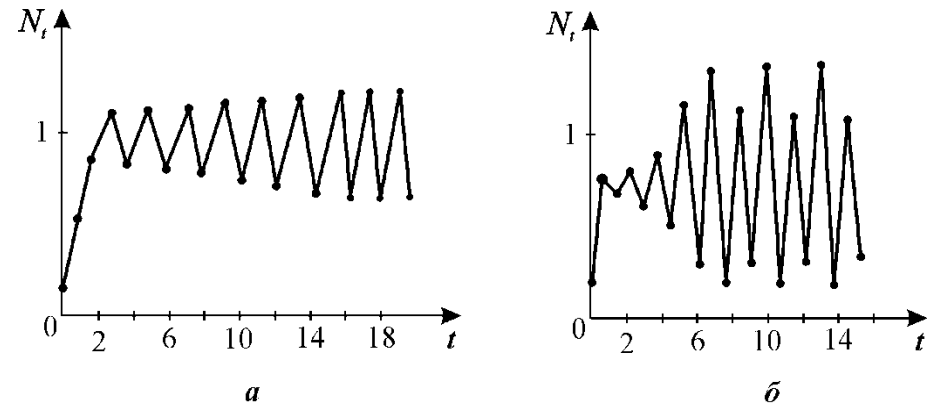
При $r > r_c = 3,102$ решение зависит от начальных условий существуют *трехточечные циклы* и *квазистохастические решения*.

Равновесие устойчиво, если $0 < r < 2$,
 решение монотонно при $0 < r < 1$ и представляет собой затухающие колебания
 при $1 < r < 2$
 при $2 < r = r_2 < 2,526$ – двухточечные циклы;
 при $r_2 < r < r_c$ появляются циклы длины $4, 8, 16, \dots, 2k$
 при $r > r_c = 3,102$ решение зависит от начальных условий. Существуют
 трехточечные циклы и квазистохастические решения

Устойчивое решение



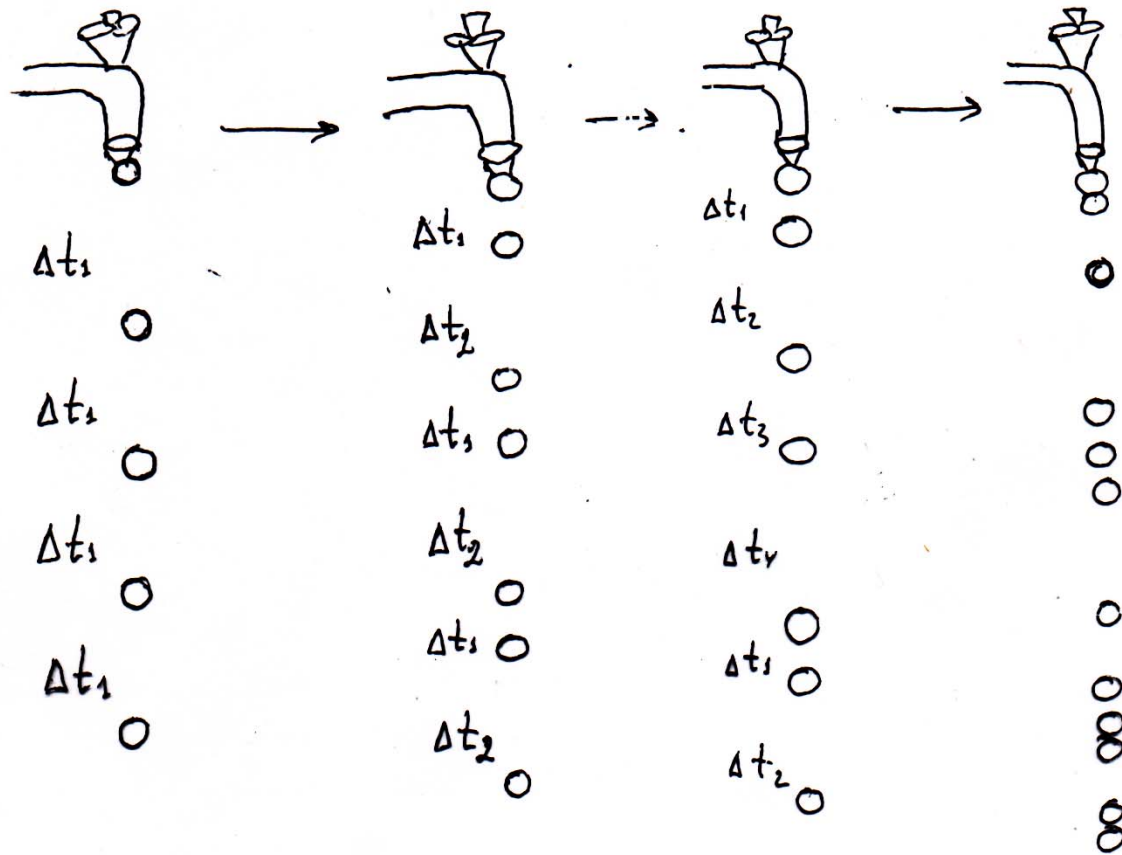
Циклы длины $2k$



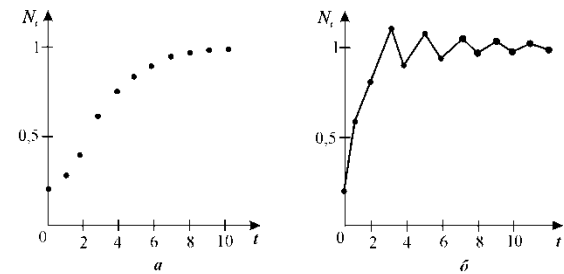
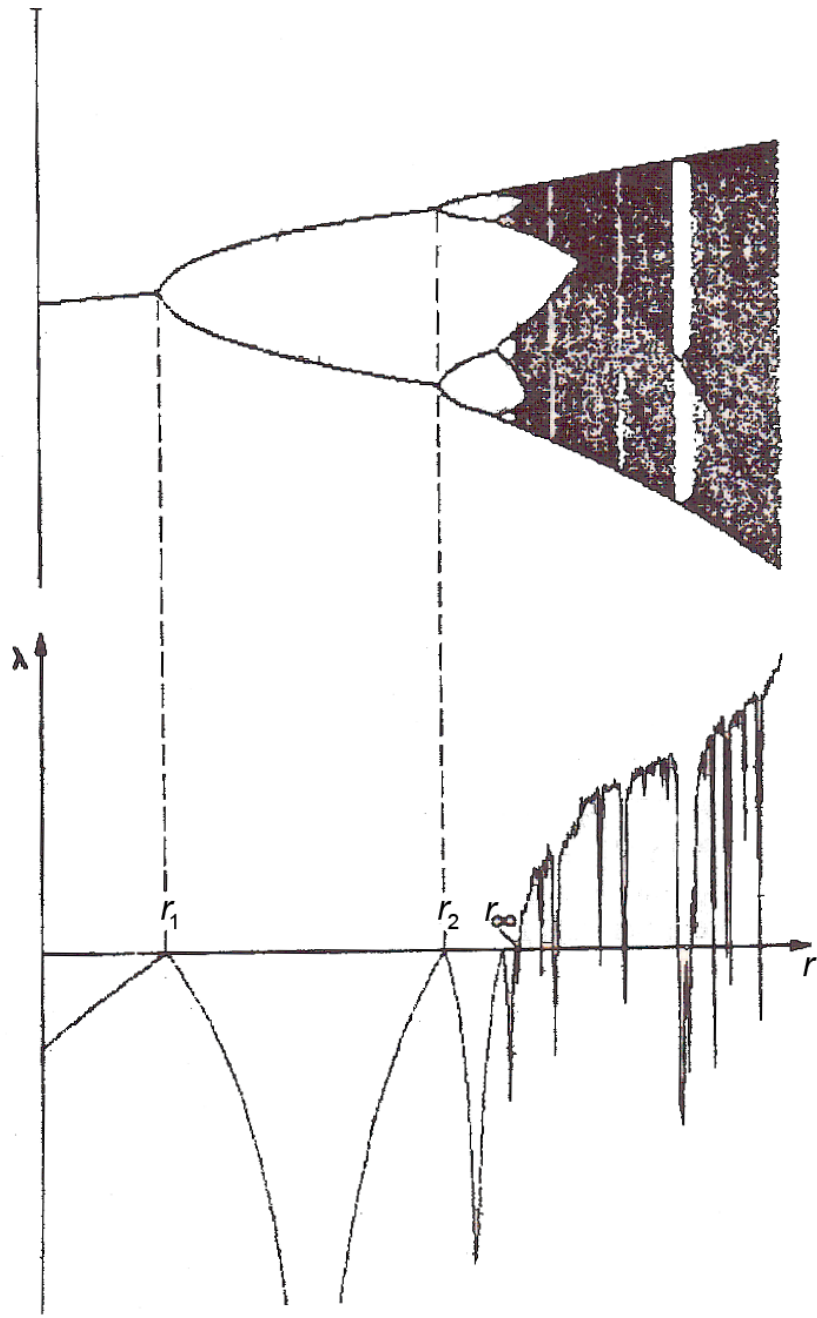
Динамический хаос

$$N_{t+1} = N_t \exp \left\{ r \left(1 - \frac{N_t}{K} \right) \right\}$$

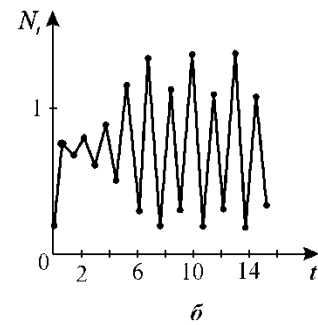
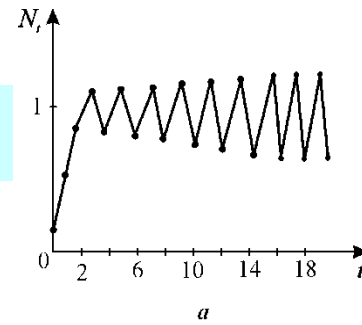
Переход к хаосу через удвоение периода



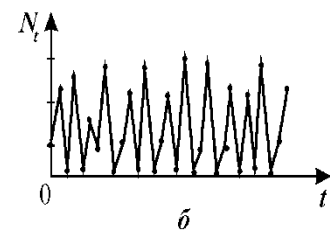
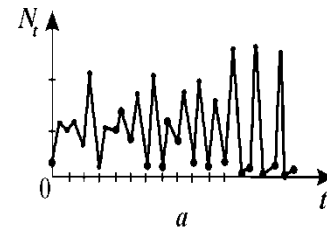
Сценарий удвоения предельного цикла



r_1



r_∞



Показатель Ляпунова – характеризует устойчивость траектории

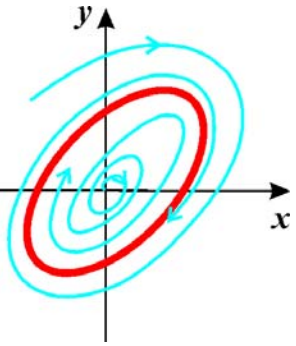
Устойчивость и неустойчивость движения

Устойчивость по Ляпунову

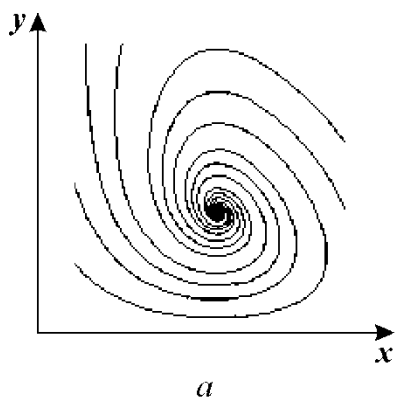
Для *устойчивого по Ляпунову* движения малое начальное возмущение не нарастает. Т.е. *движение устойчиво по Ляпунову*, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta(\varepsilon)$, что для всякого движения $\mathbf{x}(t)$, для которого $||\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*(t)|| < \delta$, при всех $t > t_0$ выполняется неравенство: $||\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*(t)|| < \varepsilon$.

Знак $|| \quad ||$ означает норму (длину) вектора.

Устойчивость по Пуассону



предполагает, что соответствующая фазовая траектория при $t \rightarrow \infty$ не покидает ограниченной области фазового пространства. Находясь в этой области бесконечно долго, она неизбежно будет возвращаться в сколь угодно малую окрестность начальной точки. Времена возврата могут соответствовать *периоду* или *квазипериоду* при регулярном движении, а могут представлять собой случайную последовательность, если решение отвечает режиму динамического хаоса.



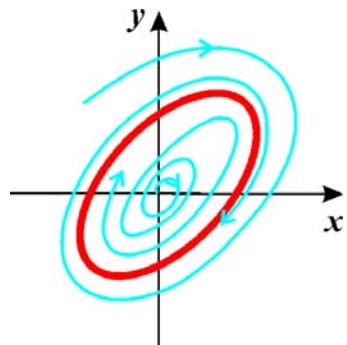
Устойчивый
фокус



Устойчивый узел

Аттрактор.

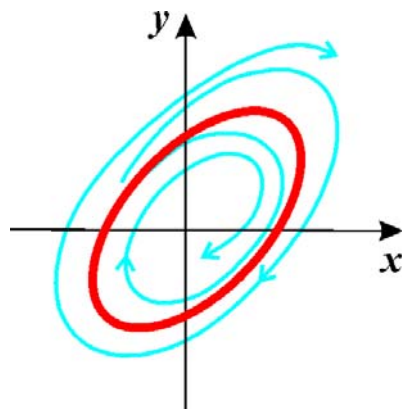
- Если все точки множества V будут принадлежать L при $t \rightarrow +\infty$, то L – *притягивающее предельное множество, или аттрактор*. Тогда V – *бассейн притяжения аттрактора* (подобно бассейну реки – территории, с которой она собирает свои воды).



Устойчивый
предельный цикл

Репеллер

- Если все точки множества V будут принадлежать L при $t \rightarrow -\infty$, то L – отталкивающее предельное множество, или *репеллер*.



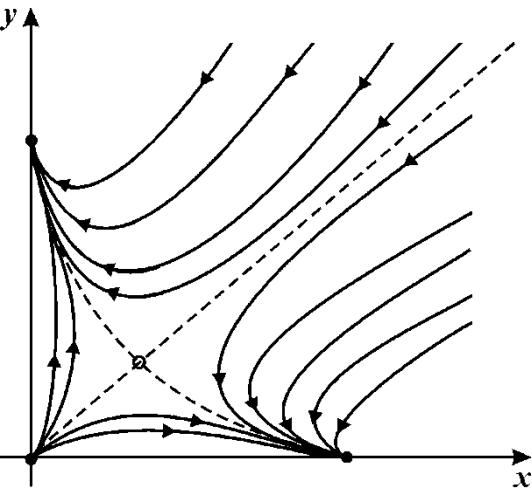
Неустойчивый
предельный цикл

Неустойчивый узел,

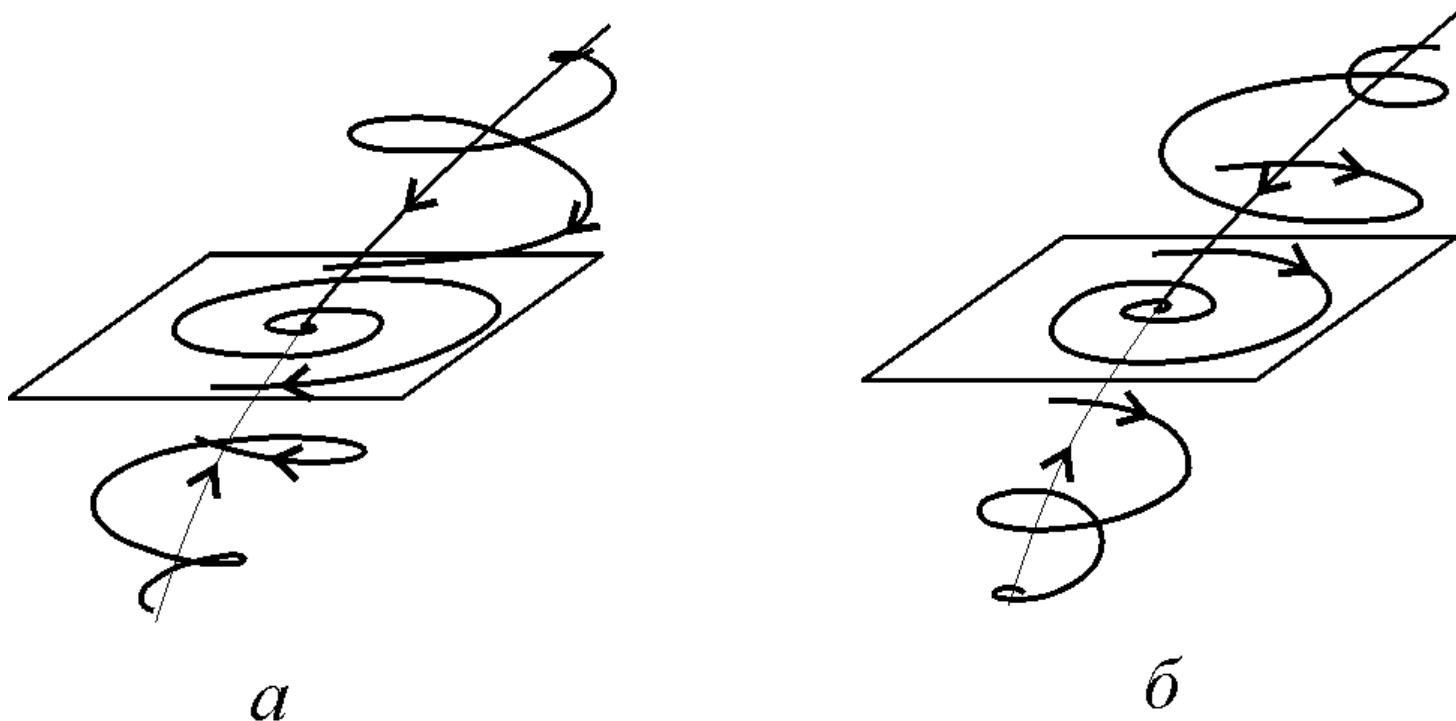
Неустойчивый фокус

Седловое множество

- Если множество V состоит из двух подмножеств $V = W^s \cup W^u$, причем точки, принадлежащие W^s , стремятся к L в прямом времени, а точки, принадлежащие W^u , стремятся к L в обратном времени, тогда L называется *седловым предельным множеством (или седлом)*. Множества W^s и W^u – устойчивое и неустойчивое многообразия седла.



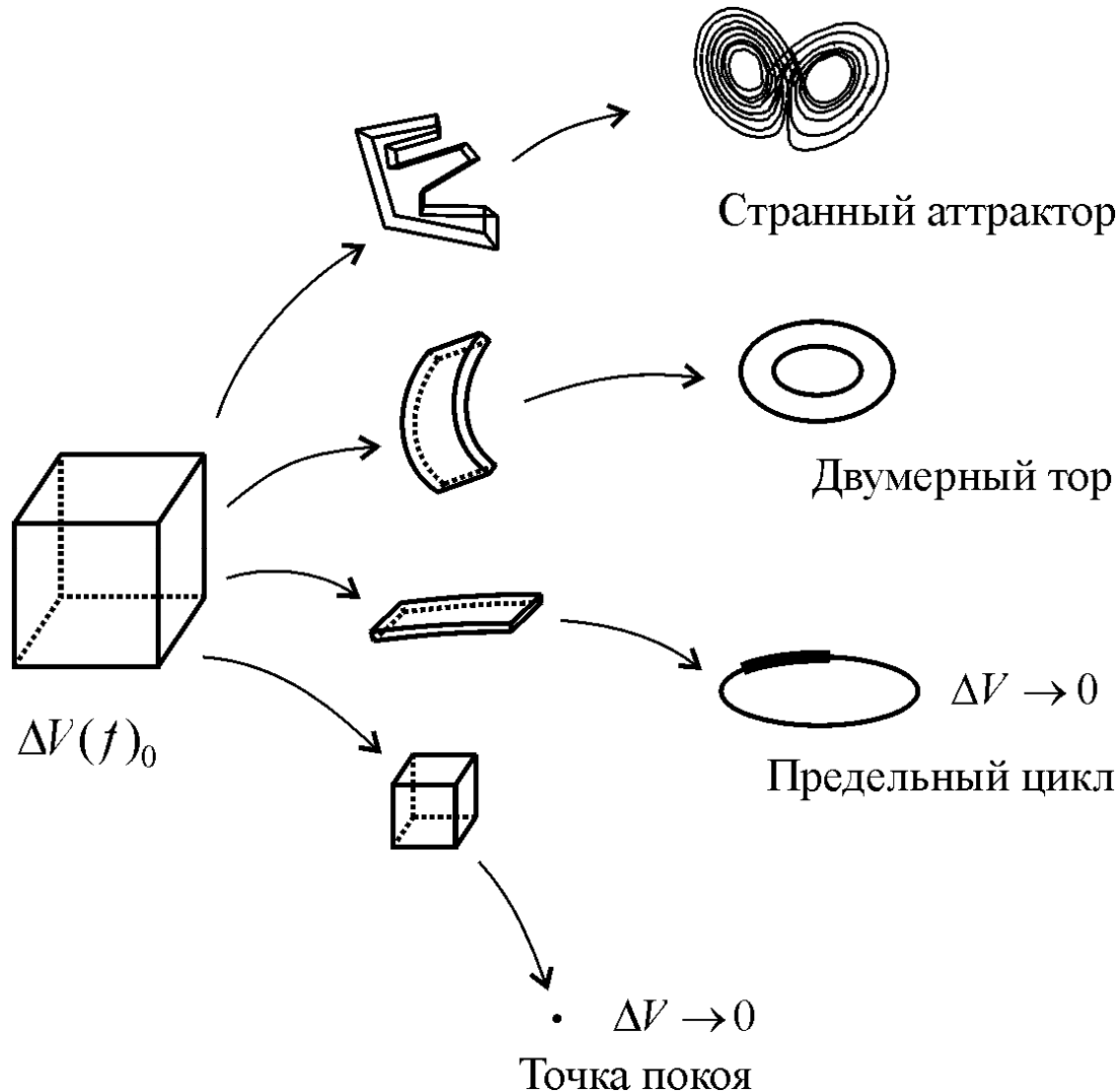
Седло-фокусы



Седло-фокусы в пространстве $N = 3$.

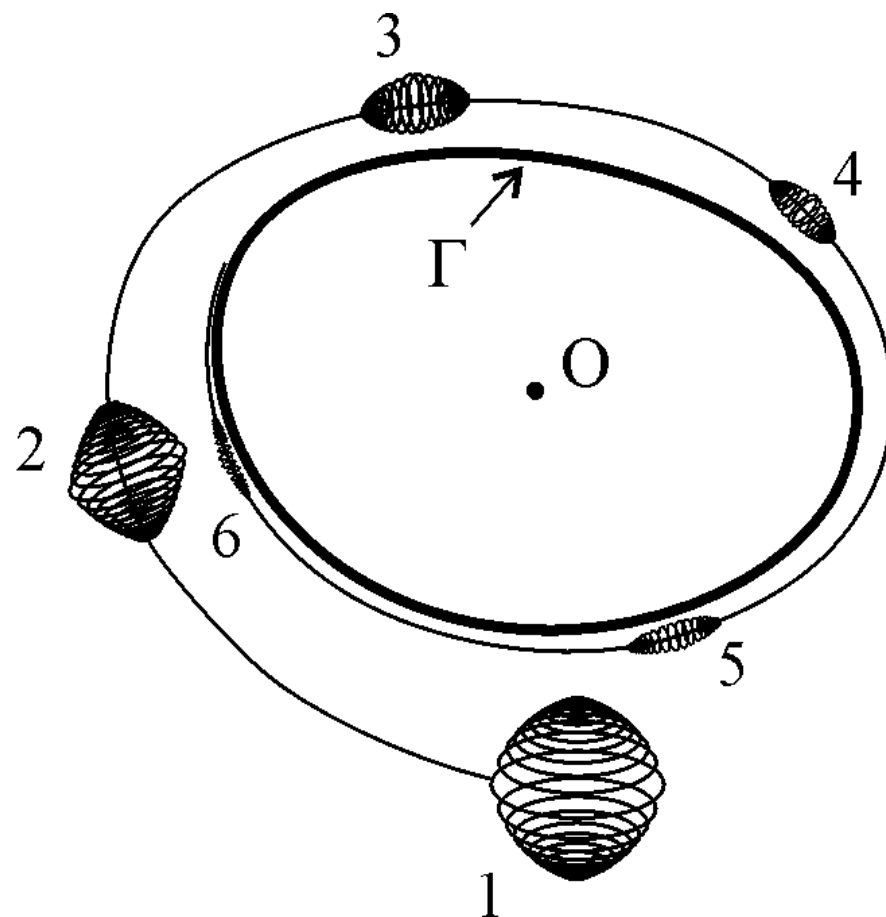
а) p_1 — действительно и отрицательно, $p_{2,3}$ — комплексно сопряженные, $\operatorname{Re} p_{2,3} > 0$; б) p_1 — действительно и положительно, $p_{2,3}$ — комплексно сопряженные, $\operatorname{Re} p_{2,3} < 0$

Диссипативные системы

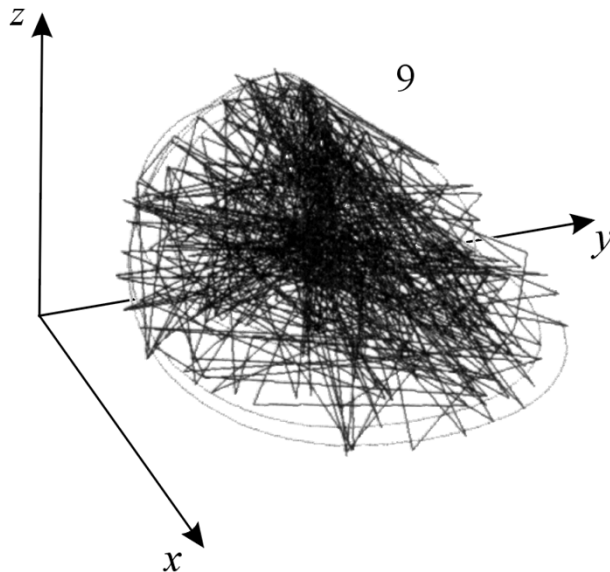
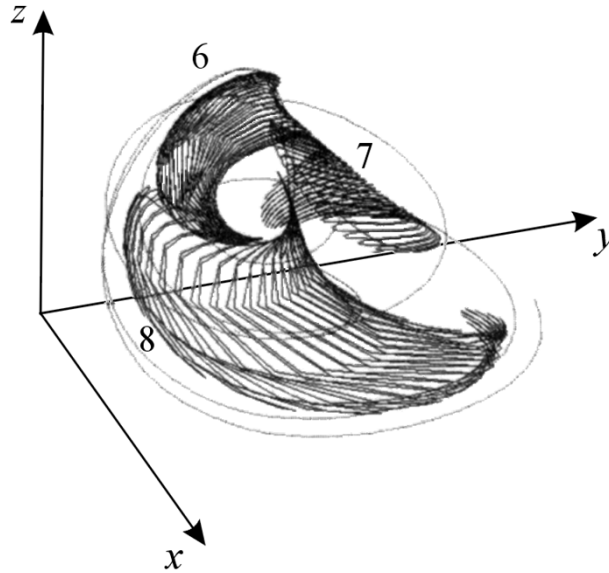
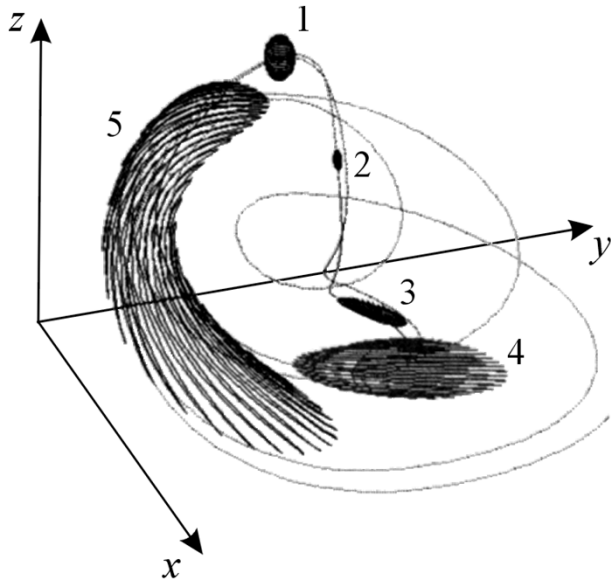


Существование аттрактора в диссипативной системе связано со свойством сжатия элемента фазового объема под действием оператора эволюции.

Сжатие элемента фазового пространства радиуса ε
при «наматывании» траектории на устойчивый
предельный цикл -траектория Γ .



Эволюция малого
первоначального
фазового объема во
времени в
динамической
системе
(Анищенко и др.,
1999).



$$\dot{x} = mx + y - xz,$$

$$\dot{y} = -x,$$

$$\dot{z} = -gz + gI(x)x^2, \quad I = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

Фракталы – самоподобные множества



*Benoît
Mandelbrot*
1924-2009

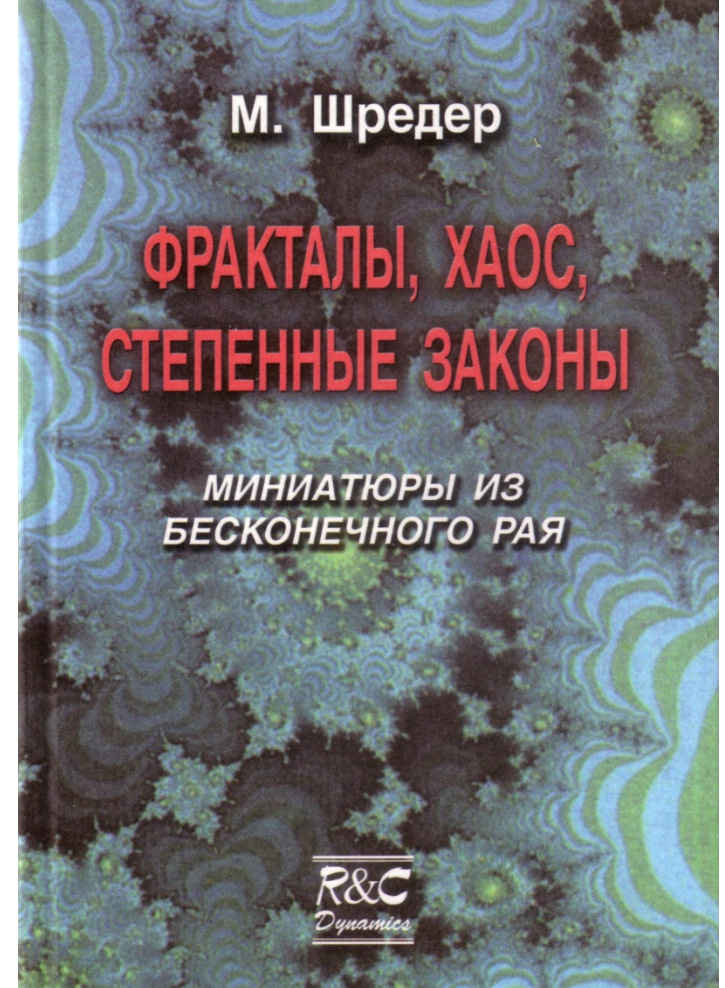
Бенуа Мальдельброт. 1924-2010. Французский и американский математик. Придумал понятие «фрактал» - “Fractus” (лат) – сломанный, разбитый.





Феддер. Фракталы

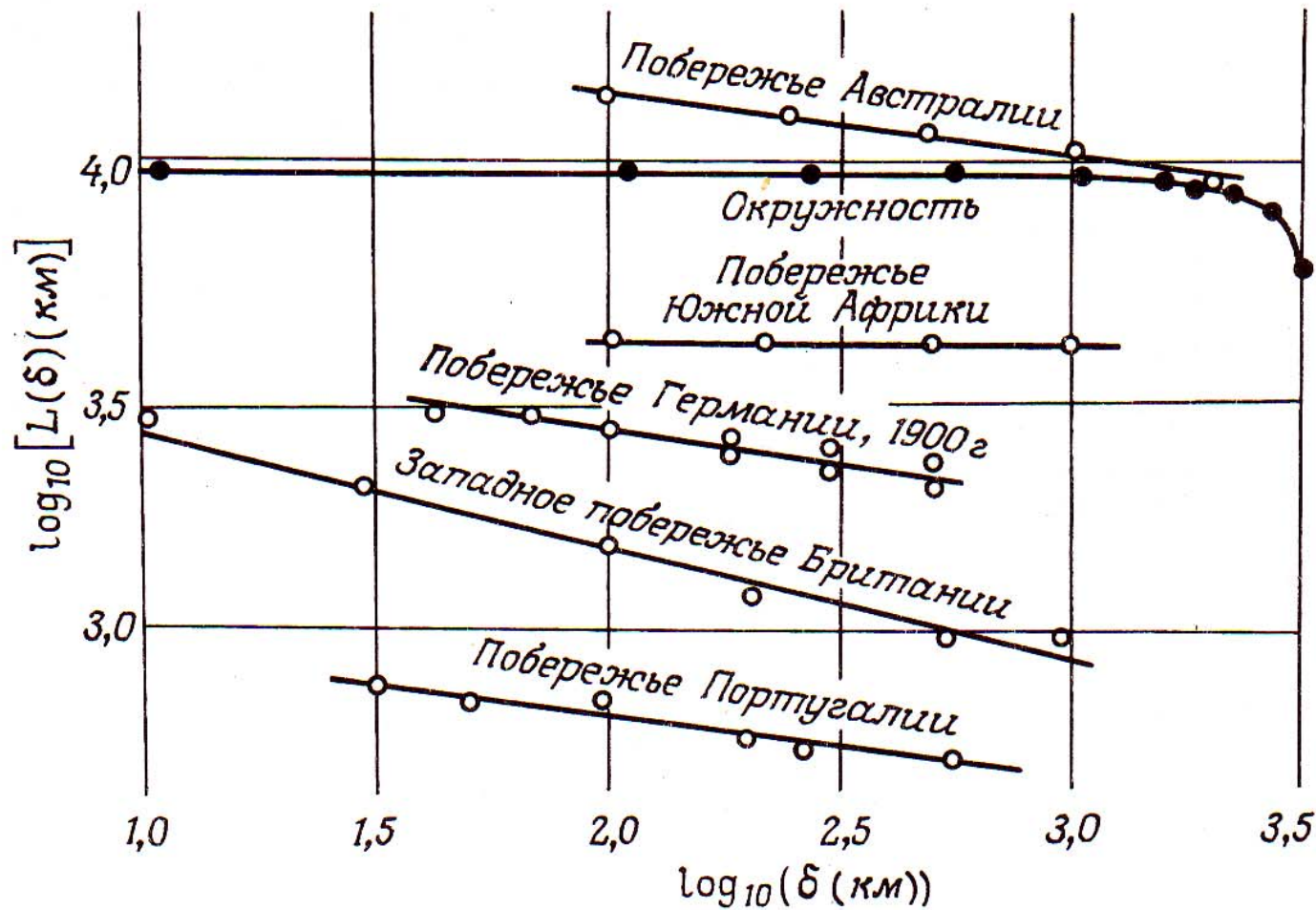
РИС. 2.1. Побережье южной части Норвегии. Береговая линия перечерчена из географического атласа и представлена в цифровом виде с помощью раstra, состоящего примерно из 1800×1200 ячеек. Изображенная сверху квадратная решетка имеет шаг $\delta \sim 50$ км.



Б.Мандельброт. Фракталы и хаос. Множество Мандельброта и другие чудеса. Изд. РХД 2009

The Mandelbrot set and beyond.
Springer

Длина береговых линий



2. 2.3. Длина береговых линий как функция выбранного шага δ (км) [134].

Фракталы. Размерность



Хаусдорф Феликс
(Hausdorff Felix, 1868-1942)
—немецкий математик один
из основоположников
современной топологии.

Писатель.
Псевдоним Поль Монгре

Длина береговой линии стремится к величине

$$L(\delta) = a\delta^{1-D}$$

$$N(\delta) \sim 1/\delta^D$$

Для обычной кривой множитель a равен количеству отрезков: $a=L_N$, а показатель D равен единице. Но для береговой линии Норвегии $D \sim 1,52$. Показатель D называется размерностью Хаусдорфа-Безиковича или фрактальной размерностью.

Альвеолы человеческого легкого

Оптическая
микроскопия – 80 кв. м

Электронная
микроскопия – 140 кв. м
 $D=2,17$



Мембраны

Субклеточные мембраны в клетках печени

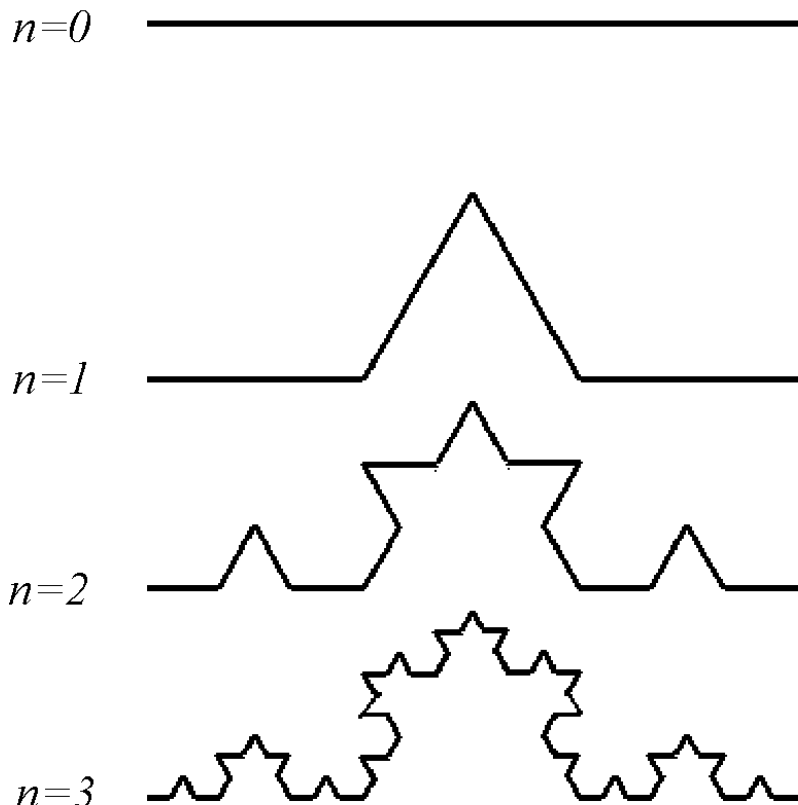
Внешние митохондриальные мембраны $D=2,09$

Внутренние митохондриальные мембраны $D=2,53$



Кривая Коха.

Первые четыре шага построения.



фон Кох Нильс Фабьян Хельге (1870-1924),
шведский математик, автор основополагающих
работ по теории чисел

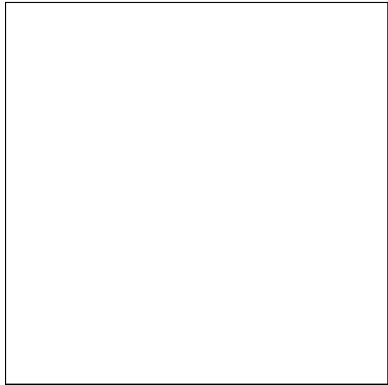
Длина кривой 1-го поколения $L(1/3) = 4/3$.
4 звена, длина каждого – $1/3$

Длина кривой 2-го поколения.
Число звеньев: $N=4^2=16$, длина каждого – $1/9$

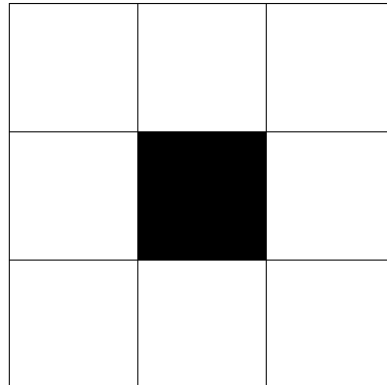
Длина каждого звена: $\delta=3^{-n}$
 $n = -\ln \delta / \ln 3$
 $L(\delta) = (4/3)^n = \delta^{1-D}$ $D = \ln 4 / \ln 3 \sim 1,2628$

Построение ковра Серпинского. Начальный элемент – белый квадрат со стороной, равной 1. Из него вырезается черный квадрат, со стороной, равной $1/3$. Далее из каждого белого квадрата вырезается снова черный квадрат, со стороной, равной $1/3$ стороны белого квадрата. На рисунке показаны четыре поколения предфракталов. Размерность подобия $D = \ln 8 / \ln 3 = 1,89 \dots$

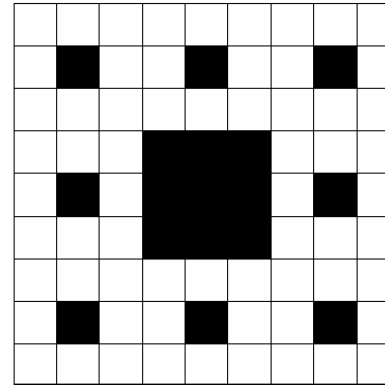
$n=0$



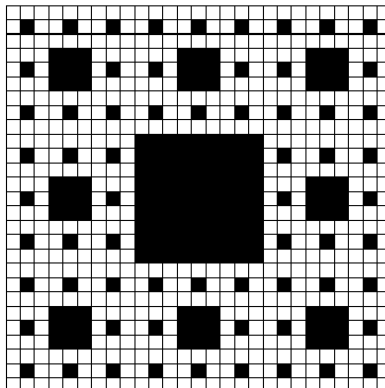
$n=1$



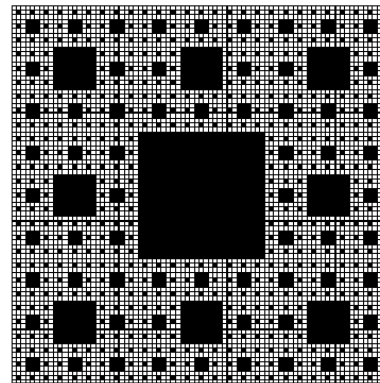
$n=2$



$n=3$

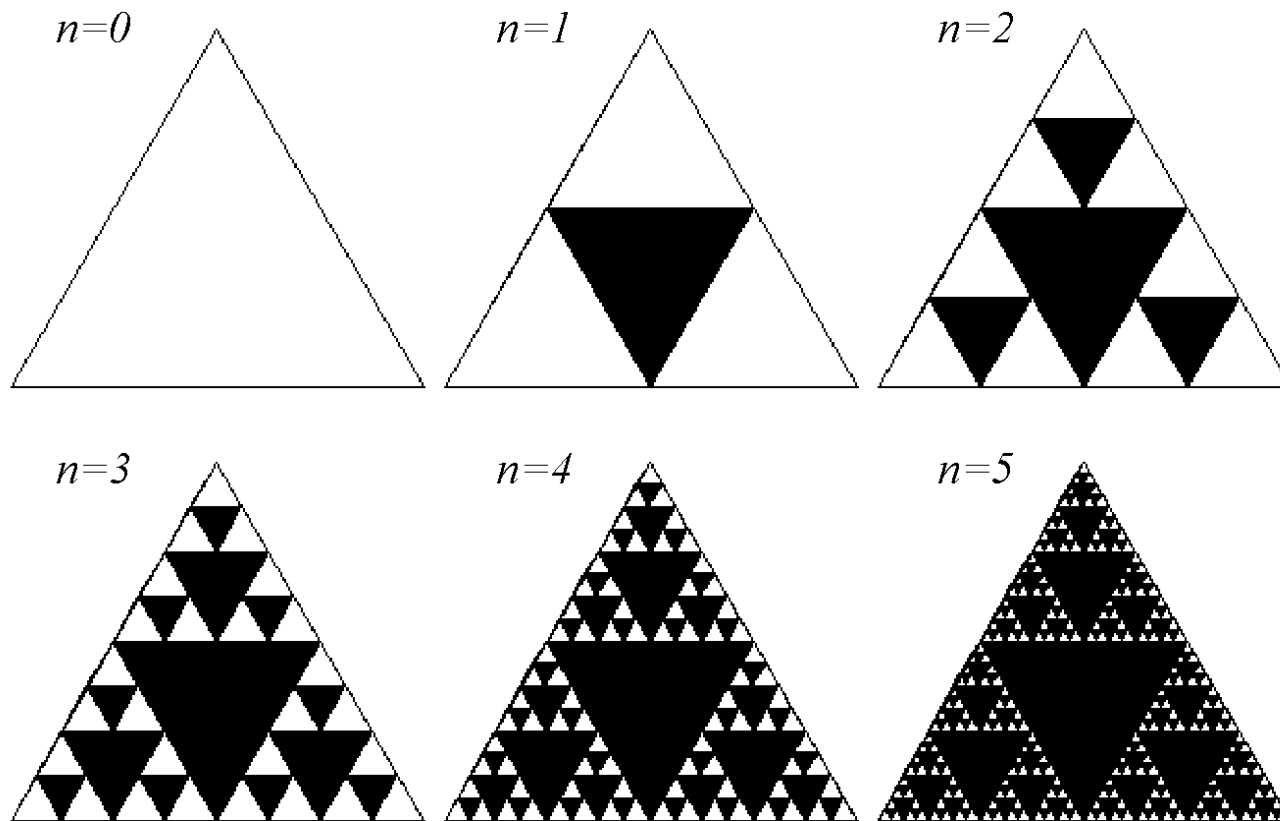


$n=4$

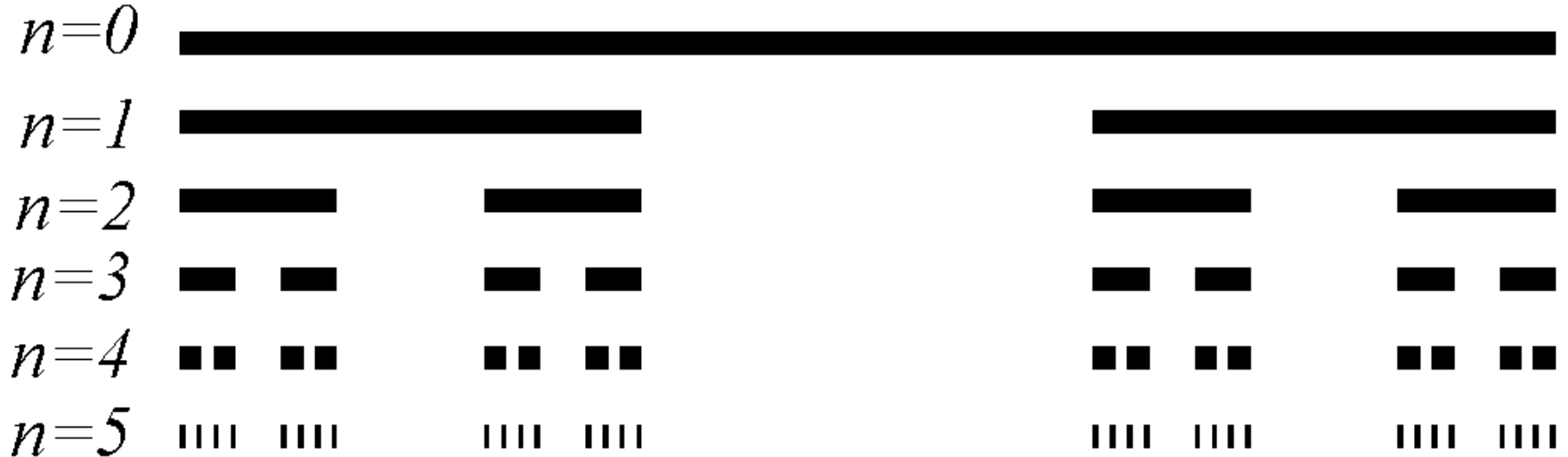


Вацлав Серпинский (1882-1969) –польский математик. Основные труды посвящены теории множеств. Теории чисел, топологии

Построение треугольной салфетки Серпинского. Начальный элемент – треугольник со всеми внутренними точками. Образующий элемент исключает из него центральный треугольник. На рисунке показаны пять поколений предфракталов. Фрактальное множество получается в пределе при бесконечно большом числе поколений и имеет фрактальную размерность $D = \ln 3 / \ln 2 = 1,58\dots$



Канторово множество названо в честь великого математика
 Георга Кантора (1845-1918), открывшего его в 1883 г.
 Построение кривой Коха можно рассматривать как процесс
 добавления к отрезку все более мелких деталей. Построение
 канторова множества сводится к выбрасыванию из
 первоначального отрезка все более мелких отрезков



Хаотическое поведение демонстрируют

- Системы трех и более автономных нелинейных дифференциальных уравнений
- Системы двух **неавтономных** дифференциальных уравнений (периодическое воздействие на колебательную систему)
- Дискретные системы
- Системы с запаздыванием

Glycolysis with periodic substrate input flux

$$\frac{d[\text{F6P}]}{dt} = \frac{d[\text{PEP}]}{dt} + \frac{d[\text{ATP}]}{dt}$$

$$= \bar{V}_{in} + A \sin \omega_e t - V_{\text{PFK}}$$

$$\frac{d[\text{ADP}]}{dt} = - \frac{d[\text{ATP}]}{dt} = V_{\text{PFK}} - V_{\text{PK}}$$

F6P – fructose 6 phosphate

PEP – phosphoenolpyruvate

$\bar{V}_{in}$ - the mean input flux

ω_e - frequency of the periodic input flux

$$A = \bar{V}_{in}$$

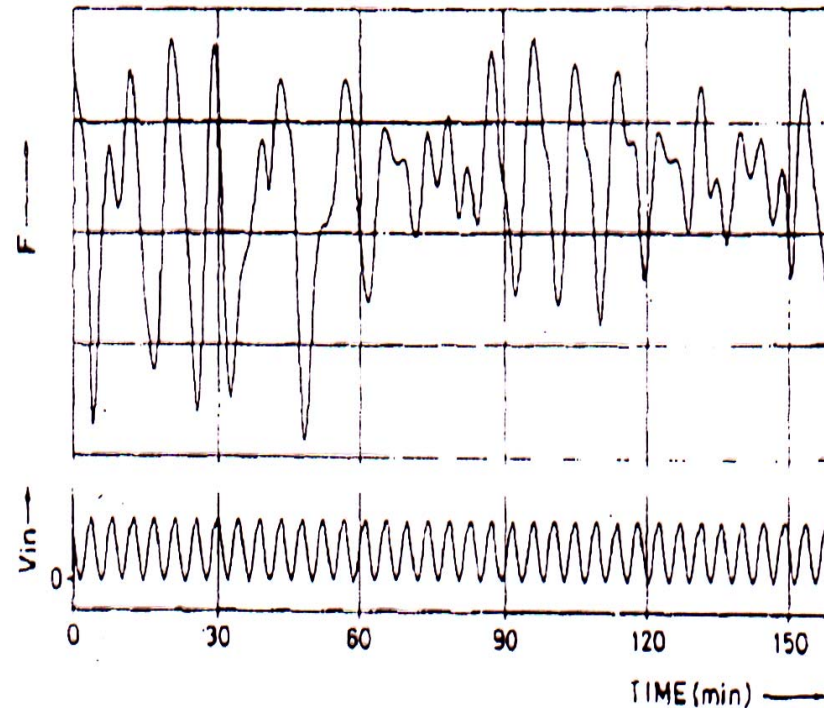
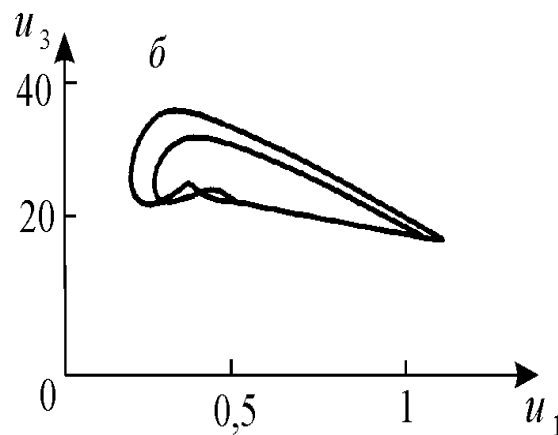
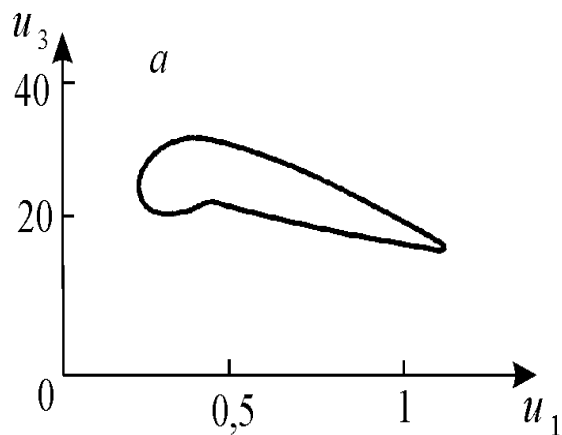
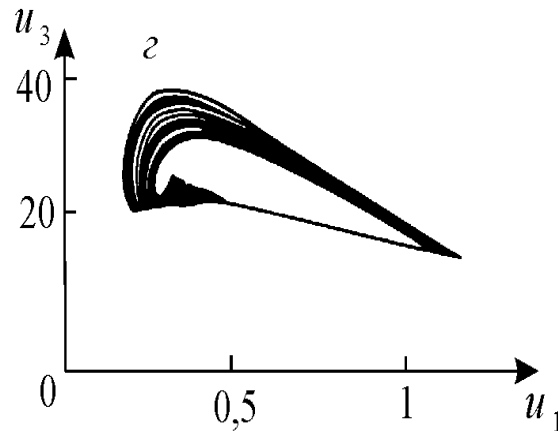
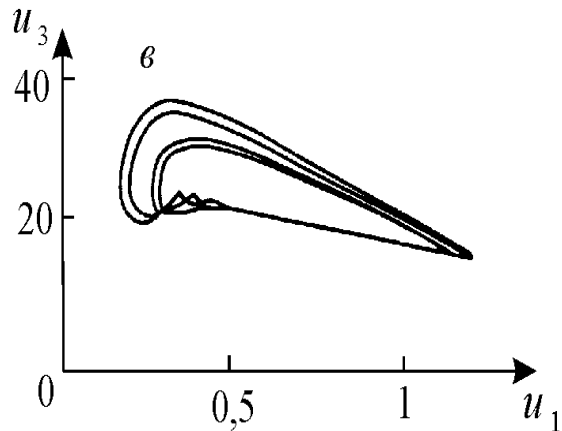


Fig. 2. Measured NADH fluorescence (upper curve) of yeast extract under sinusoidal glucose input flux (lower curve).



Странный
аттрактор в
системе хищник
— две жертвы



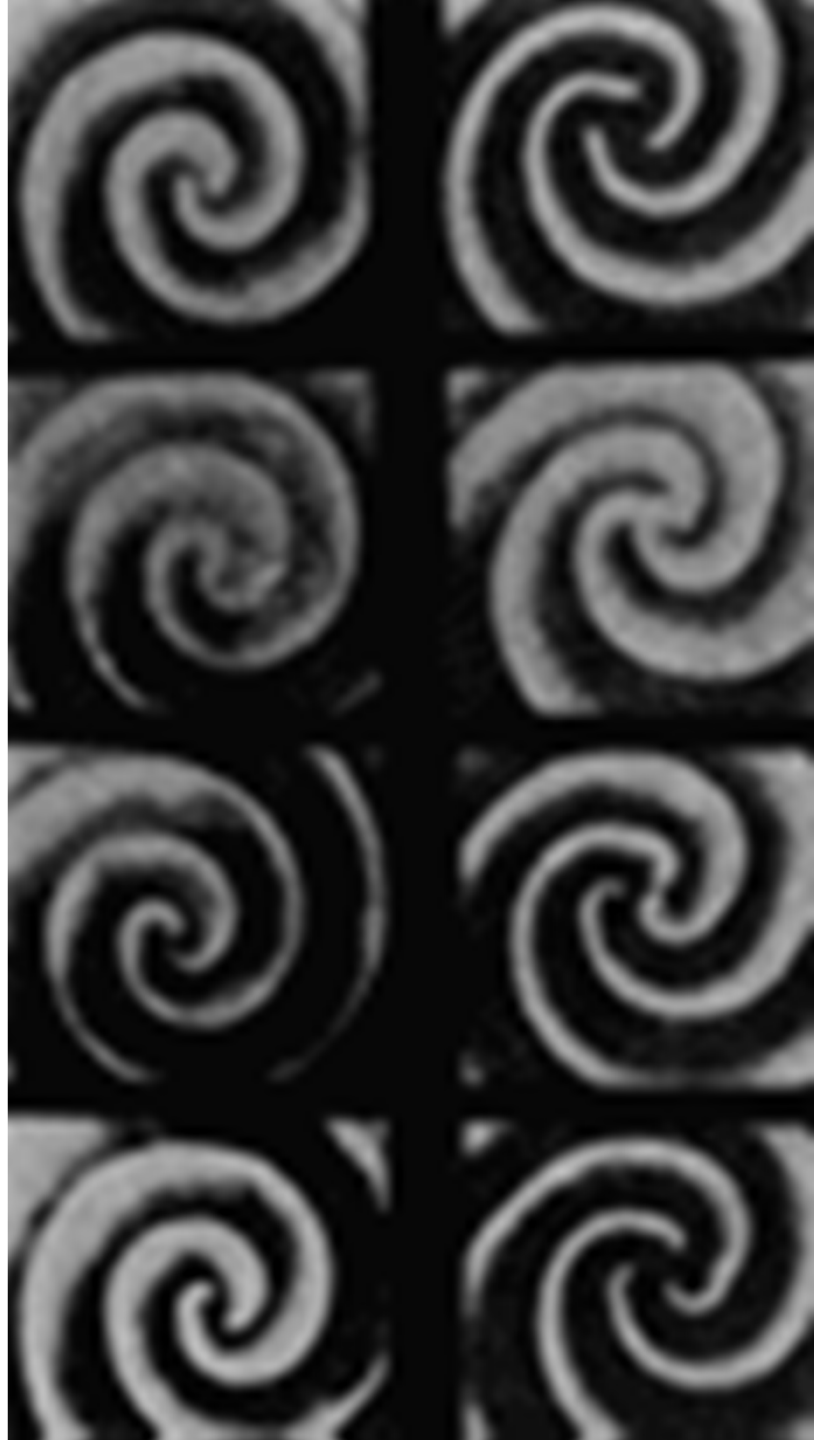
$$\begin{aligned}\frac{du_1}{dt} &= u_1(\alpha_1 - u_1 - 6u_2 - 4u_3), \\ \frac{du_2}{dt} &= u_2(\alpha_2 - u_2 - u_1 - 10u_3), \\ \frac{du_3}{dt} &= u_3(-1 + 0.25u_1 + 4u_2 - u_3).\end{aligned}$$

Система, описывающая взаимодействие трех видов: хищник - две жертвы (А.Д. Базыкин, Е.Апони́на, Ю.Апони́н, 1985). При уменьшении параметра скорости роста первой жертвы происходит усложнение траектории (последовательное удвоение предельного цикла) $a - г$. Колебательная динамика переходит в квазистохастическую

Подавление хаоса и управление хаосом

А.Ю.Лоскутов,
А.С.Михайлов.
Основы теории
сложных систем

ИКИ-РХД, 2007



Вопросы

- Приведите примеры детерминированных систем с квазистохастическим поведением в своей области знания
- В чем смысл существования таких систем?