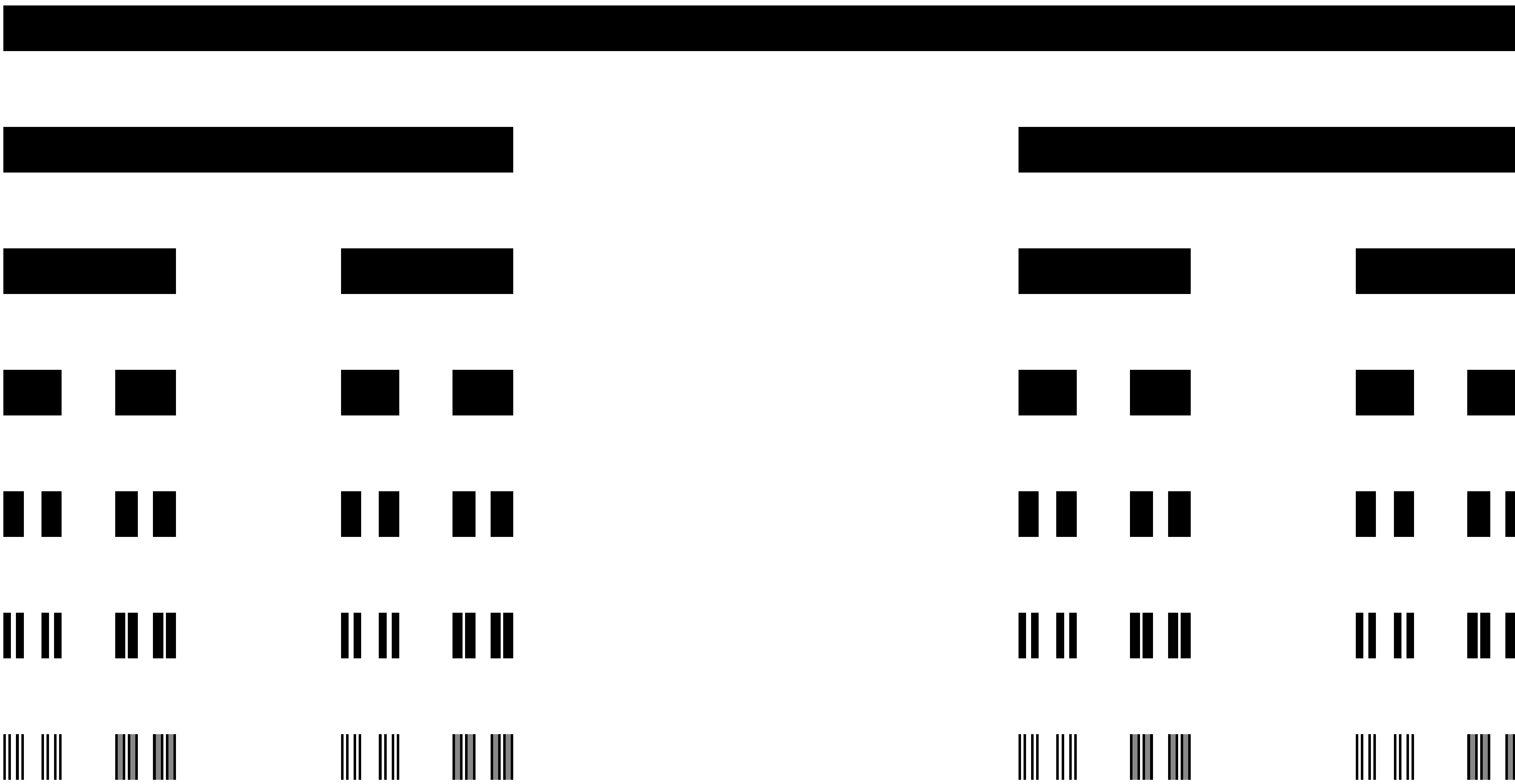
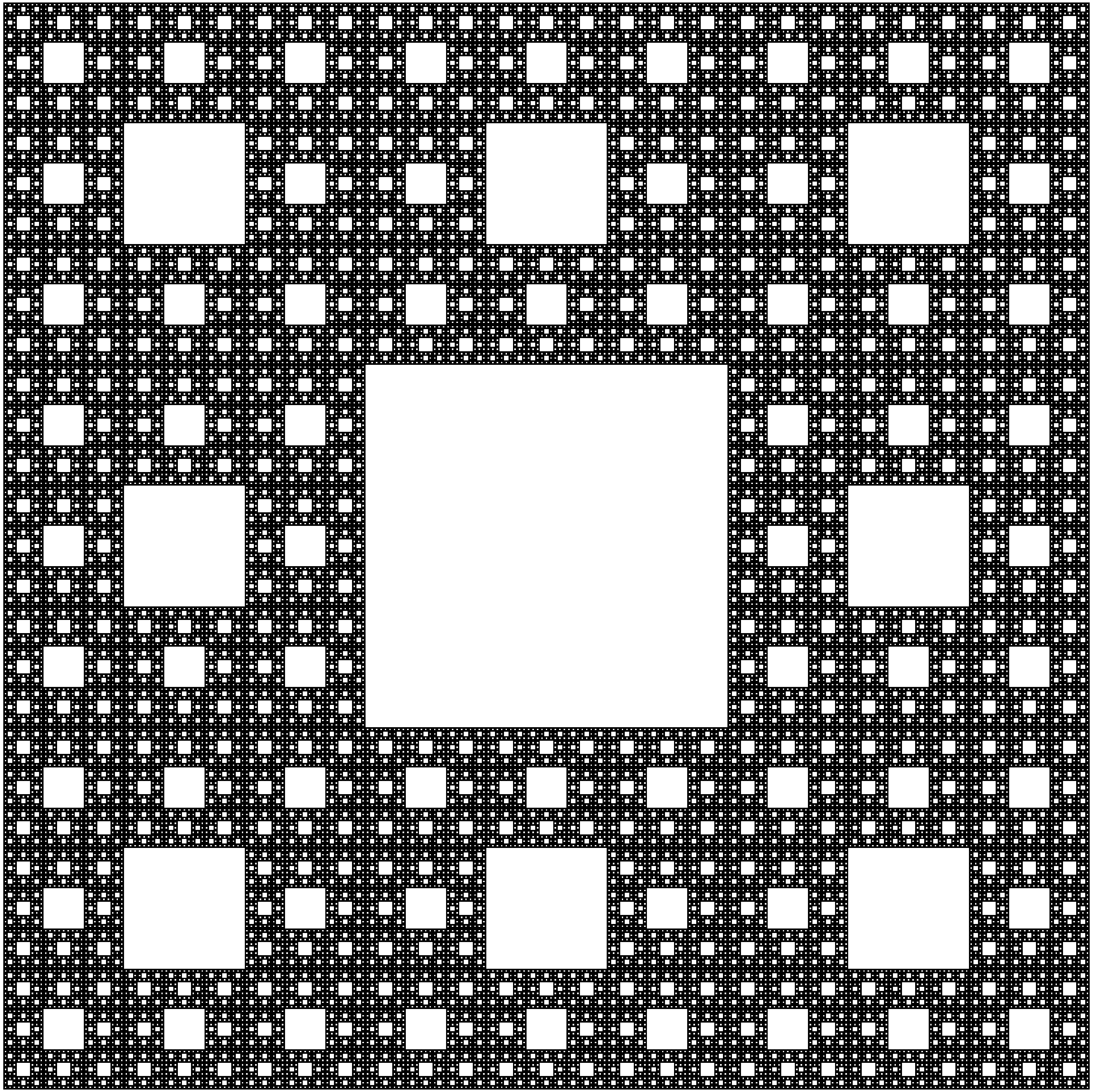
Фрактал. Что это такое?

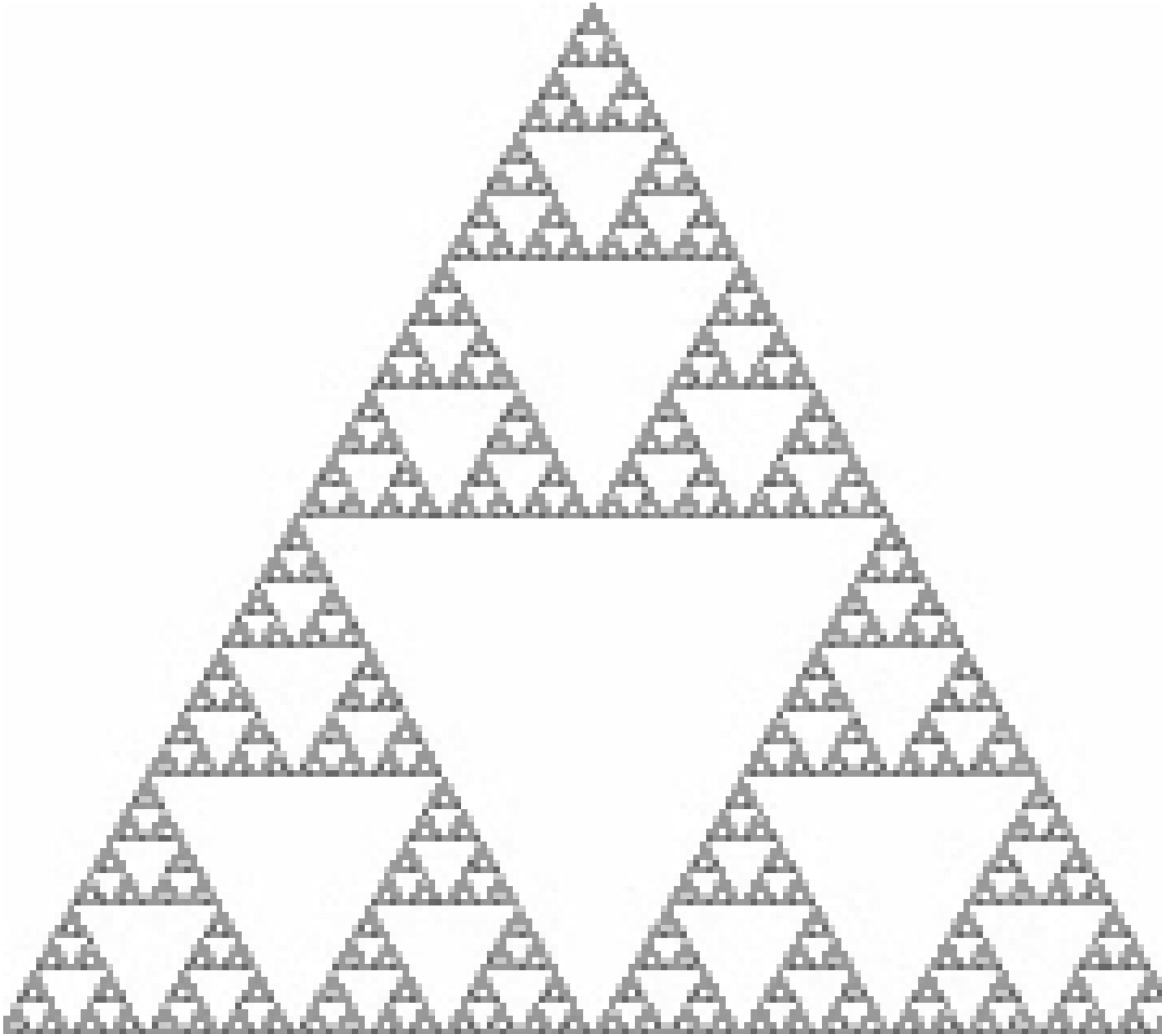
Фракта́л (лат. fractus — дроблёный, сломанный, разбитый) — математическое множество, обладающее свойством самоподобия, то есть однородности в различных шкалах измерения (любая часть фрактала подобна всему множеству целиком).

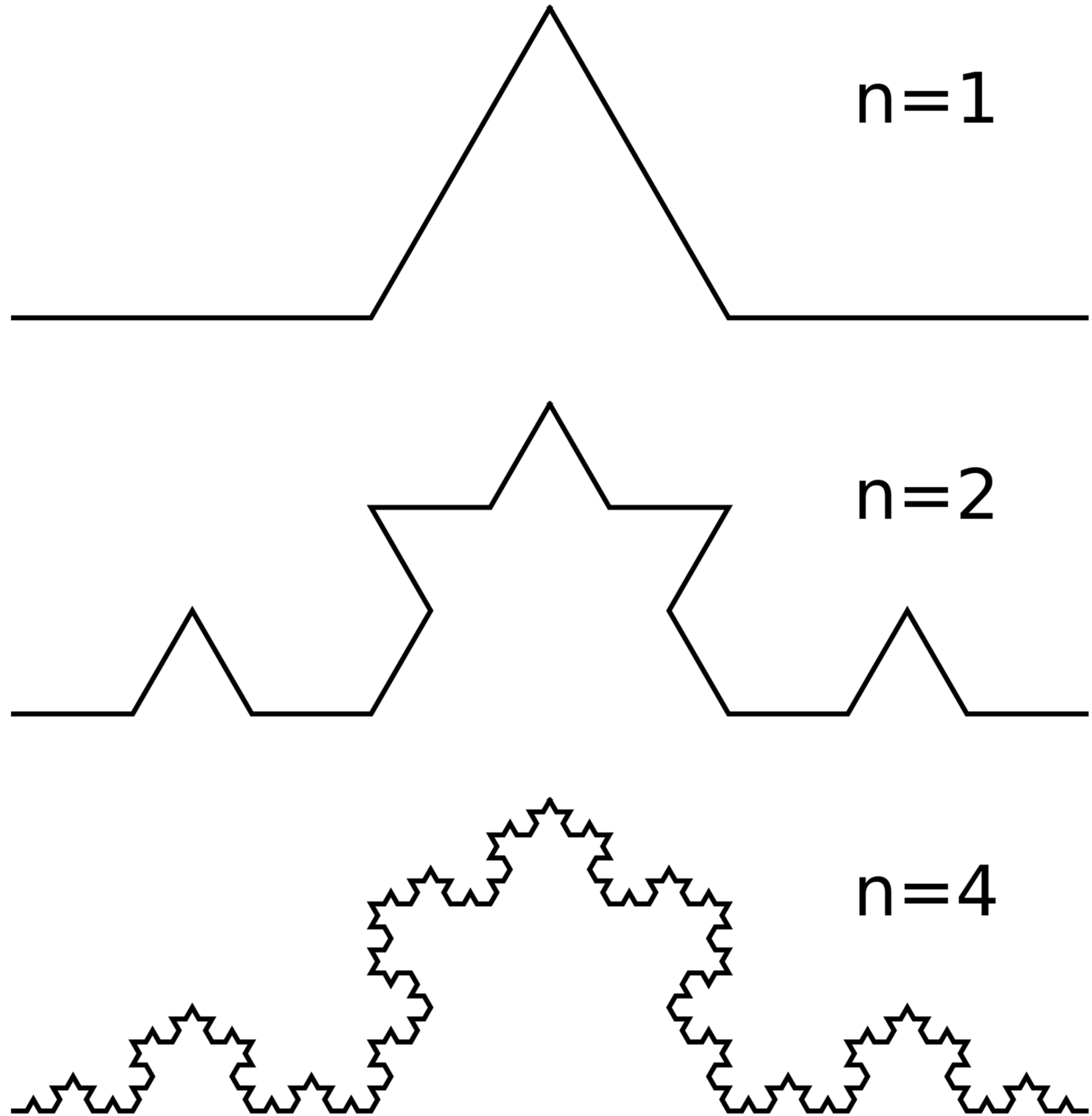
- Многие объекты в природе обладают свойствами фрактала, например: побережья, облака, кроны деревьев, снежинки, кровеносная система, система альвеол человека или животных.

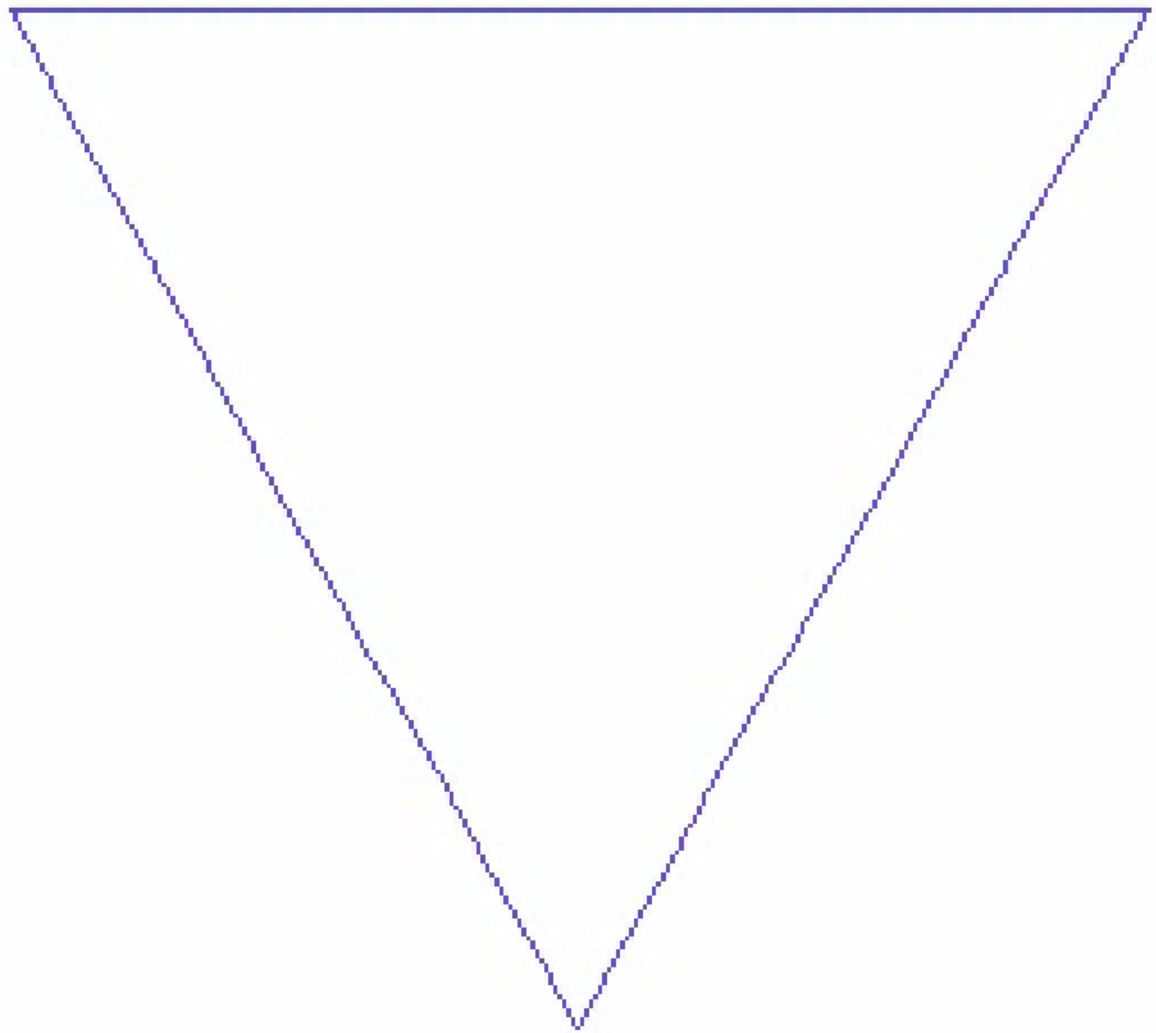
Канторово множество

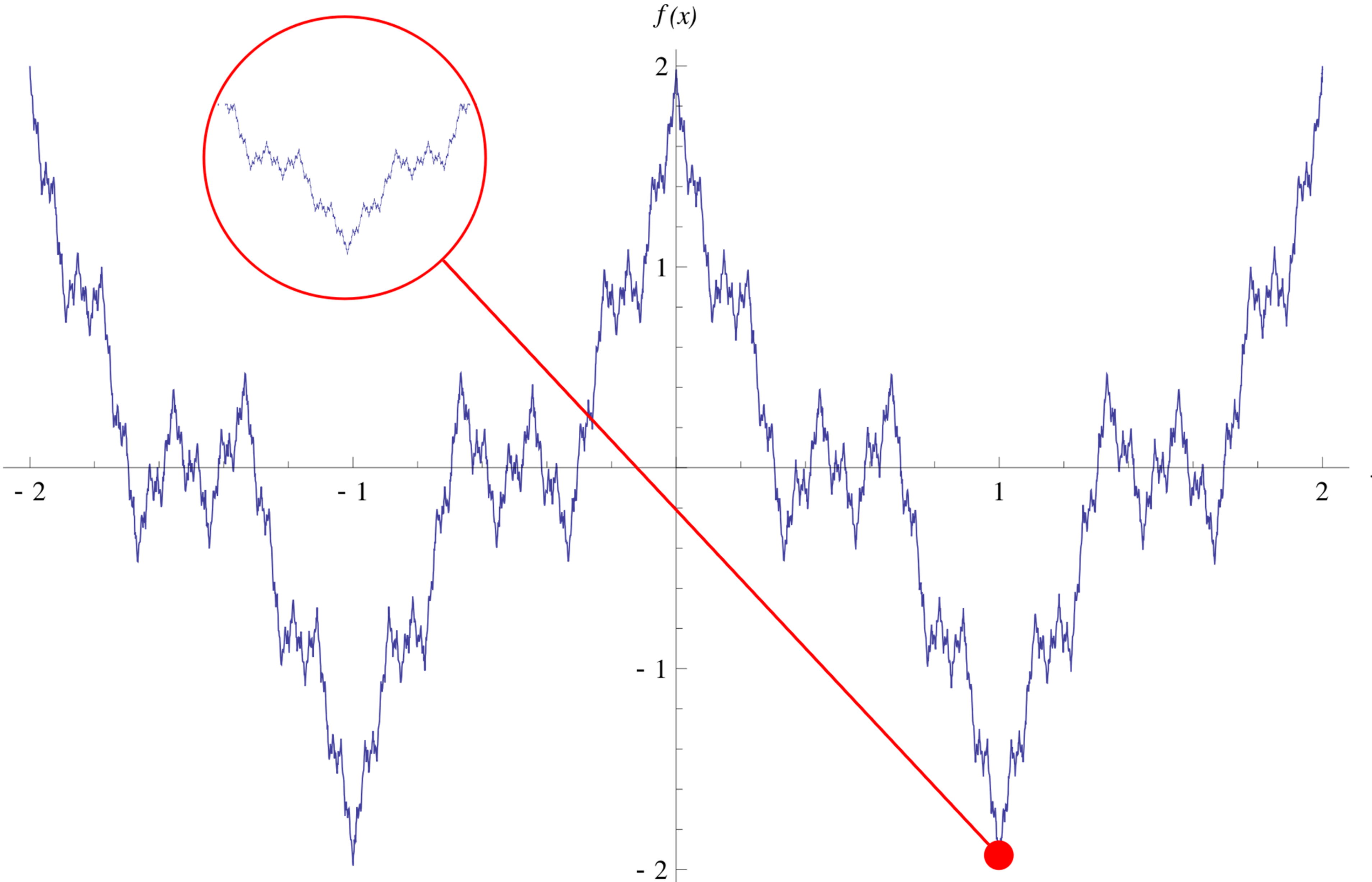







n=1
n=2
n=4




$f(x)$
2
1
- 1
- 2
- 2
- 1
1
2

Построение кривой Пиано

- Аналитическое построение.Рассмотрим функции $f(x)$ и $g(x)$, определенные на отрезке [0,1] следующим образом. Пусть разложение x в троичной системе счисления имеет вид $0, x1 x2 x3 ... xk$ (каждое из xk равно 0, 1 или 2). Тогда $f(x)$ мы определим как число, имеющее следующее разложение $0,f1 f2 f3 ... fk$ в троичной системе:

- f1 = x1
- f2 = x3, если x2 четно, и 2-x3, если x2 нечетно
- …
- fk = x2k-1, если x2+x4+...+x2k-2 четно
- fk = 2-x2k-1, если x2+x4+...+x2k-2 нечетно
- Аналогичным образом определим функцию g(x) = 0, g1 g2 ... gk... в троичной системе счисления:

- $g_1 = x_2$, если x_1 четно, и $2-x_2$, если x_1 нечетно
- …
- $g_k = x_{2k}$, если $x_1+x_3+...+x_{2k-1}$ четно
- $g_k = 2-x_{2k}$, если $x_1+x_3+...+x_{2k-1}$ нечетно

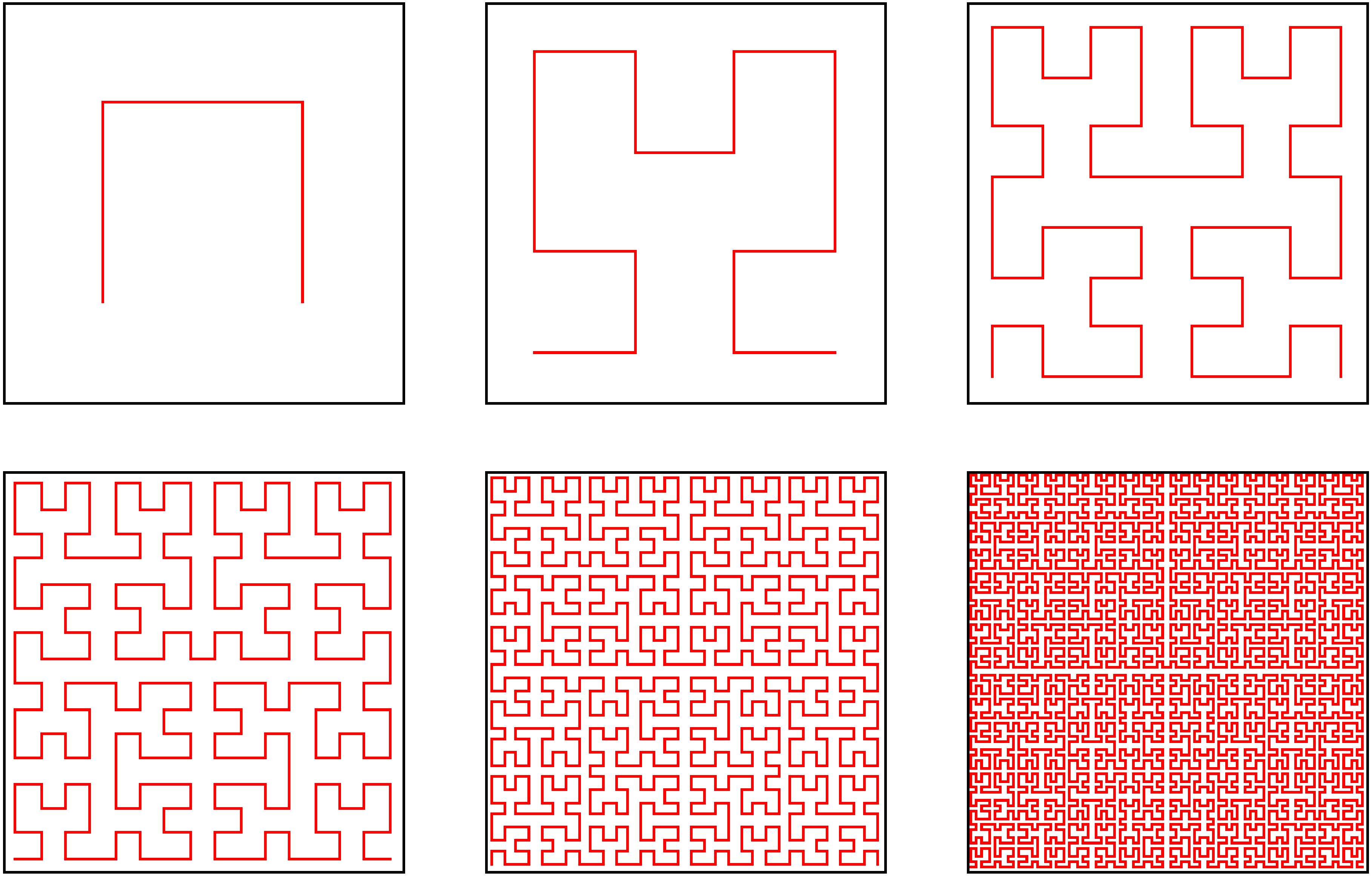
Рассмотрим теперь отображение: $x \to [f(x), g(x)]$. Можно доказать, что:

1. Функции $f(x)$ и $g(x)$ корректно определены (т.е. в числах, допускающих 2 представления в троичной системе счисления, значения $f(x)$ и $g(x)$ окажутся не зависящими от выбора представления).

2. Функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на $[0,1]$.

3. Система уравнений $f(x) = a$ и $g(x) = b$ имеет не менее 1 и не более 4 решений при любых a и b, лежащих на отрезке $[0,1]$.

Тем самым, отображение с координатными функциями f и g на плоскости $x \to [f(x),g(x)]$ непрерывно переводит отрезок $[0,1]$ в квадрат $[0,1]$^2.



Фракталы естественным образом возникают при изучении нелинейных динамических систем. Наиболее изучен случай, когда динамическая система задаётся итерациями многочлена или голоморфной функции комплексной переменной на плоскости.

Пусть p(z) — многочлен, z0 — комплексное число. Рассмотрим следующую последовательность: z0, z1 = p(z0), z2=p(z1), z3 = p(z2), ...

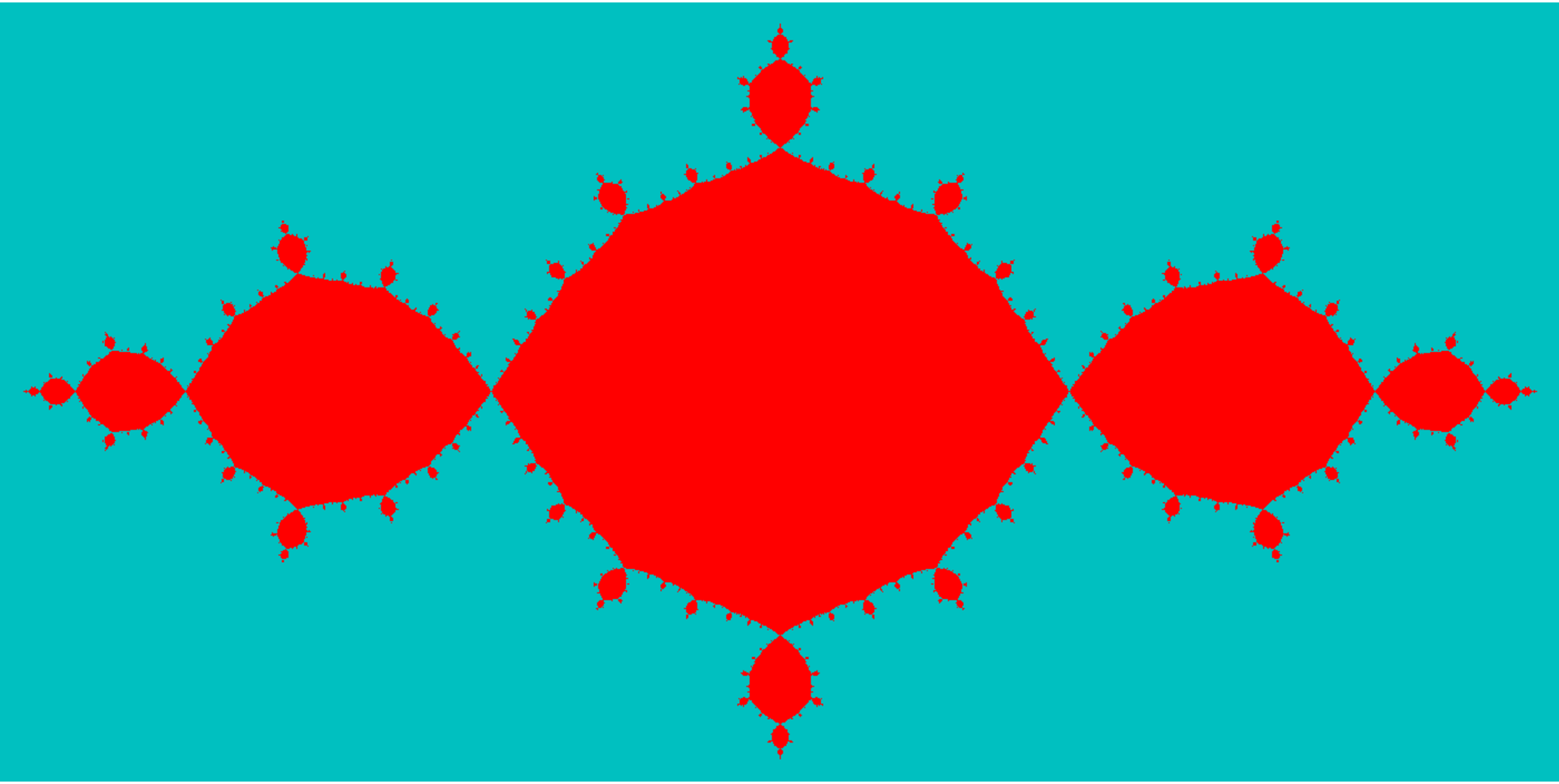
Нас интересует поведение этой последовательности при стремлении n к бесконечности. Эта последовательность может:

1) стремиться к бесконечности,
2) стремиться к конечному пределу,
3) демонстрировать в пределе циклическое поведение, например: $z1, z2, z3, z1, z2, z3, \dots$
4) вести себя хаотично, то есть не демонстрировать ни один из трёх упомянутых типов поведения.

Множества значений $z0$, для которых последовательность демонстрирует один конкретный тип поведения, а также множества точек бифуркации между различными типами, часто обладают фрактальными свойствами.

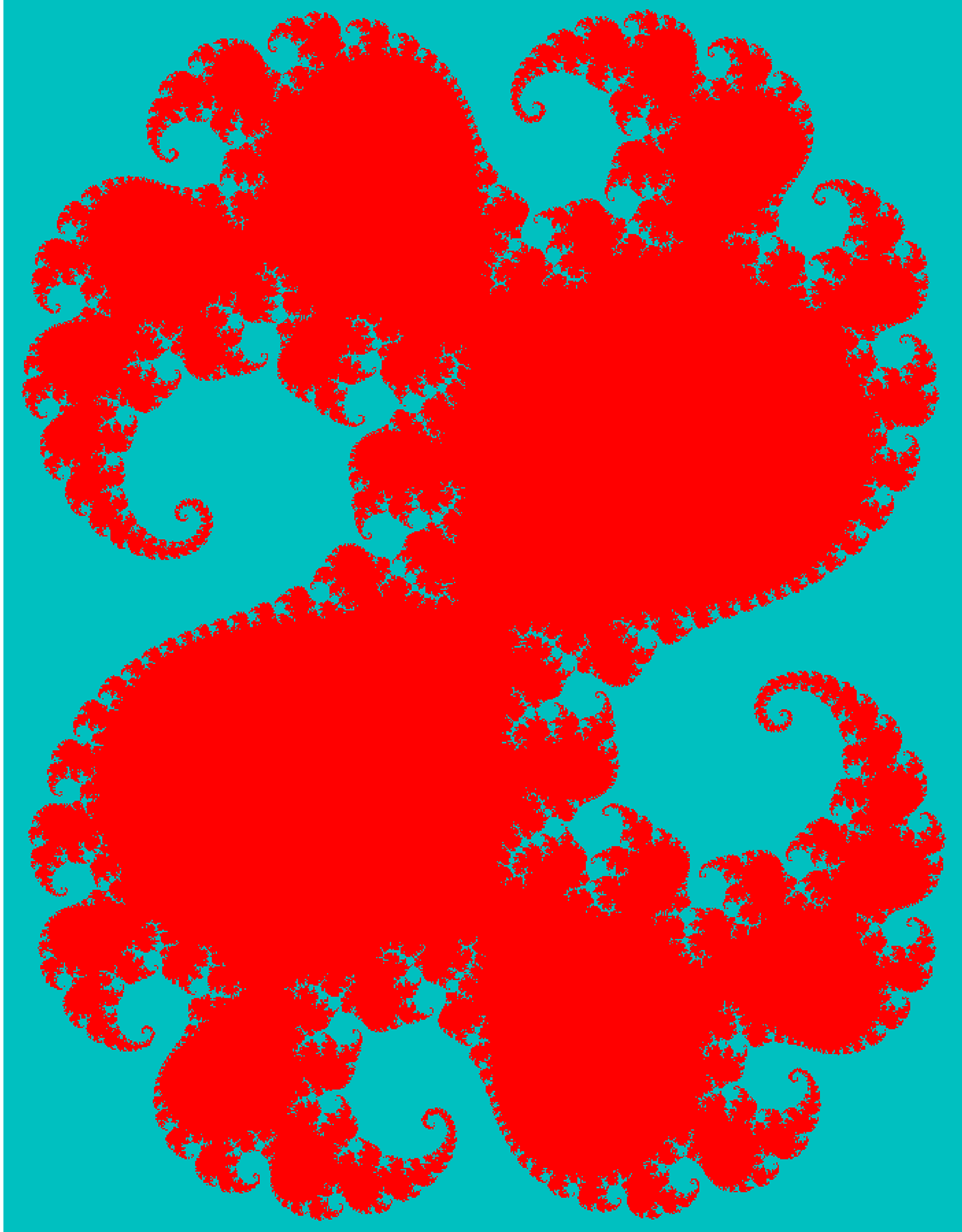
Множество Жулия рациональной функции— множество точек, динамика в окрестности которых в определённом смысле неустойчива по отношению к малым возмущениям начального положения.

Пусть f: CP → CP — рациональное отображение. Множество Фату это множество тех точек, орбиты которых устойчивы по Ляпунову.
Множество Жюлиа — дополнение к множеству Фату.

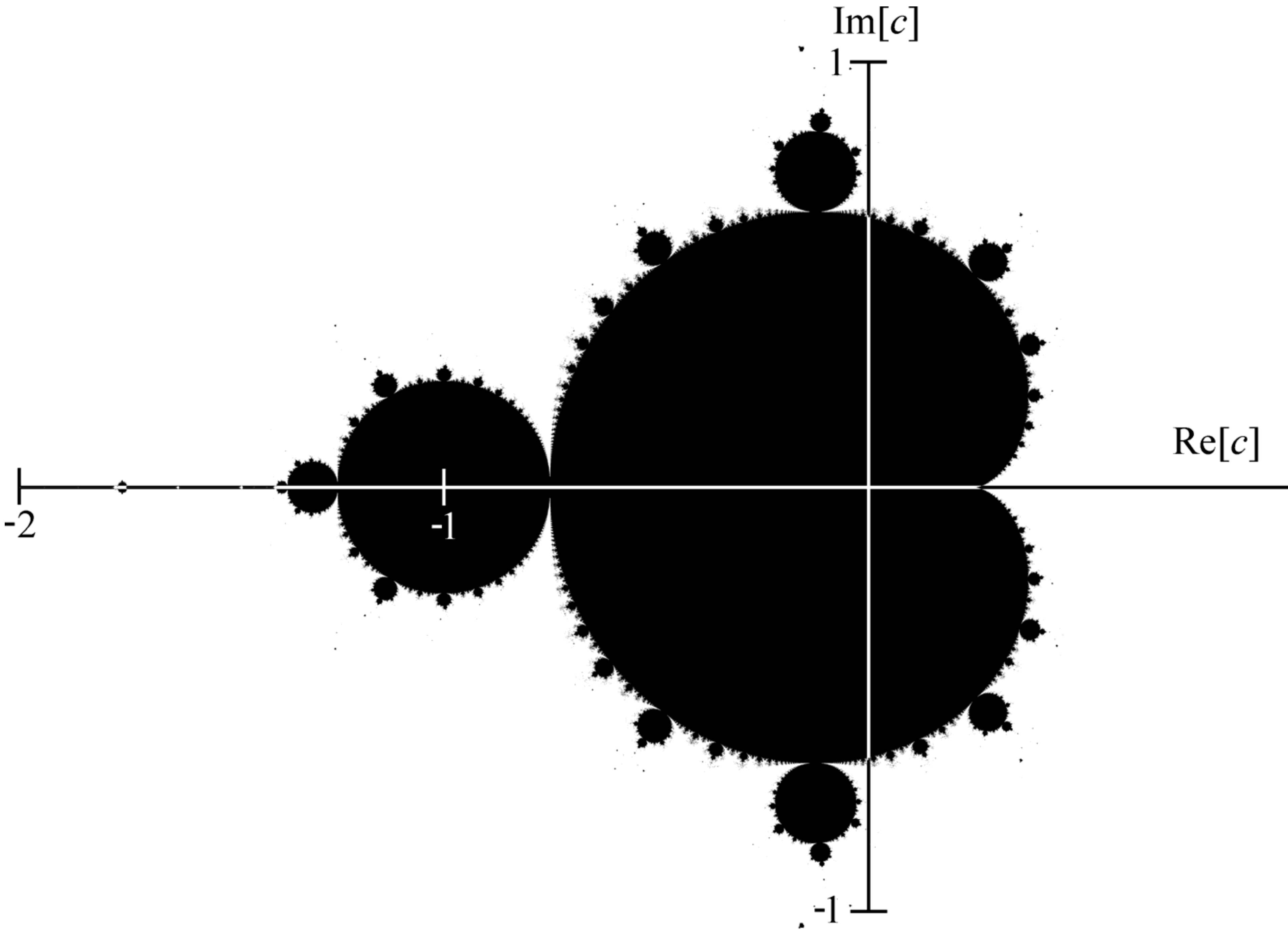


f(z) = z^2 - 1

f(z) = z^2 + 0,28 +0,0113i



Другой вариант получения фрактальных множеств — введение параметра в многочлен p(z) и рассмотрение множества тех значений параметра, при которых последовательность zn демонстрирует определённое поведение при фиксированном z0. Так, множество Мандельброта — это множество всех c из C, при которых zn для p(z)=z^2+c и z0 не стремится к бесконечности.


Im[c]
1
Re[c]
-2
-1
-1