Интегрируемые системы математической физики

Демидов Павел, физический факультет, 3 курс

11 ноября 2020 г.

Цепочка Тоды

1953г. Ферми, Паста, Улас и Тсингоу - первый компьютерный эксперимент в математической физике. Исследовалось уравнение

$$\frac{m}{k}\ddot{u}_n = u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1} + a(u_{n+1} - u_n)^2 - a(u_n - u_{n-1})^2,$$

описывающее одномерную цепочку шариков массы m с силой упрогости $F = k\Delta l(1 + a\Delta l)$.
Цель - подтвердить гипотезу Дебая (1914 г.) о том, что конечная теплопроводность - следствие ангармоничности кристаллической решетки.

Цепочка Тоды

Начальные условия - синусоидальная волна.
Граничные условия: $u_n = u_{n+N}$ при $N = 64$.
Компьютер MANIAC-I.

Результат: решение - суперпозиция нескольких уединенных волн, которые не разрушались при столкновениях, а **упруго** отражались. Наблюдалась квазипериодическая картина. Как? Ведь задача нелинейна и принцип суперпозиции не работает?

Цепочка Тоды

1967 г. Тода.

$$\ddot{u}_n = exp(u_{n+1} - u_n) - exp(u_n - u_{n-1}).$$

Это интегрируемое уравнение с упруго взаимодействующими солитонами. Любое начальное распределение в процессе эволюции распадается на множество солитонов.
Обобщение:

$$\ddot{u}_n = 2f(u_n) - f(u_{n+1}) - f(u_{n-1}).$$

Нелинейные волны

Простейшие линейные волновые уравнения:

$$u_t = \omega u_x, \; u_{tt} = \omega^2 u_{xx}$$

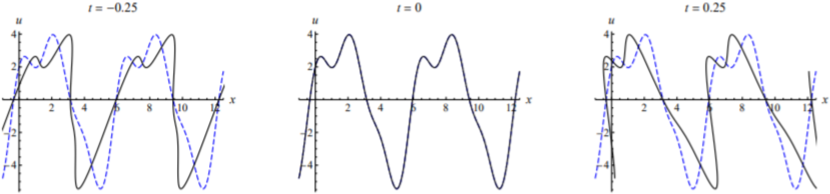
описываю волны произвольной формы, распространяющиеся с постоянной скоростью. Простейший пример нелинейного уравнения - уравнение Хопфа:

$$u_t = u u_x$$

Его решение с начальным условием $u(x, 0) = f(x)$ определяется формулой $u(x, t) = f(x + u(x, t)t)$.

Нелинейные волны

В этом уравнении происходит **разрушение** решения:



- свойство исключительно нелинейных моделей.
Также только в нелинейных моделях - **дисперсия** и **диссипация**.

Уравнение Кортевега-де Фриза

Мотивация: изучение волн на мелкой воде. 1834 г. Джон Скотт Рассел наблюдал, что волны на воде в канале имели вид горба с характерными размерами: ширина 30 фт. (9,1 м.), высота 1,5 фт. (0,45 м.). Он это назвал уединенной волной переноса.

Наблюдался солитон $u = -\frac{a^2}{\cosh(x-ct)}$. Какому уравнению он удовлетворяет? Нетрудно показать, что эти уравнением является

$u_t = u_{xxx} - 6uu_x$ - уравнение Кортевега-де Фриза

Уравнение Кортевега-де Фриза

Какова особенность уравнения Кортевега-де Фриза?

Утв. Если уравнение можно представить как условие нулевой кривизны некоторых операторов L, M, т.е. $\dot{L} = [L, M]$, то величины $H_k = \frac{1}{k} Tr(L^k)$ - первые интегралы системы.

Уравнение Кортевега-де Фриза обладает парой Лакса:
$L = -\partial_x^2 + u, M = \partial_x^3 - 3(u\partial_x + \partial_x u)$.
Следовательно, это уравнение обладает **бесконечным** числом интегралов движения.

Пара Лакса $\mapsto$ метод обратной задачи рассеяния.

Остается много вопросов...

Можем ли мы как-то использовать факт наличия достаточного числа интегралов движения для других задач (не только нелинейных уравнений в частных производных)?

Что значит интегрируемость?

По каким причинам некоторые "волшебные" системы обладают достаточным количеством сохраняющихся величин?

И так далее...

Основная идея науки об интегрируемости

Def. Система из N частиц называется **интегрируемой**, если она имеет N независимых первых интегралов движения.
Th. (Лиувилля) Для интегрируемой системы существует каноническое преобразование координат $(p, q) \mapsto (I, \theta)$, которое приводит уравнения движения к виду:
$\dot{I} = 0$, $\dot{\theta} = const$.

Таким образом, интегрируемая система может быть сведена к конечному числу алгебраический операций и вычислений интегралов.

Классическая механика

Система частиц может быть описана 2-м законом Ньютона: $m\ddot{r} = F(r, \dot{r})$

или в общем случае динамика определяется функцией Гамильтона и скобкой Пуассона:
$H = H(p, q), \dot{p} = \{p, H\}, \dot{q} = \{q, H\}$.
Эти уравнения переходят в 2-й закон Ньютона, если
$H = \frac{p^2}{2m} + U(q, \dot{q})$ и $\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial g}{\partial q}$.

Именно этот подход позволяет рассматривать не только механику взаимодействующих чатиц, но и волчки, квантовые системы (например, спиновые цепочки).

Самые простые примеры интегрируемых систем

Одномерные задачи:

Свободная частица: $\mathrm{H} = \frac{p^2}{2m}$
Уравнение движения: $m\ddot{q} = 0$

Осциллятор: $\mathrm{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}q^2$
Уравнение движения: $m\ddot{q} + \omega^2 q = 0$

Двумерная задача:

Частица в центральном поле $U = -\frac{\alpha}{r}$
Этому может отвечать, например, движение планеты вокруг Солнца или рассеяние альфа-частиц на тяжелых ядрах.

Волчок Эйлера

Это простейший интегрируемый случай динамики твердого тела.

$\frac{d\vec{L}}{dt} = [\vec{L}, \vec{\omega}],$
$\vec{L} = J\vec{\omega}$

где $\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}]$ - вектор момента импульса тела, $\vec{\omega}$ - вектор угловой скорости, J - тензор инерции.

Как задать эту динамику через гамильтонов формализм?
$H = \frac{1}{2}\left(\frac{J_1^2}{I_1} + \frac{J_2^2}{I_2} + \frac{J_3^2}{I_3}\right)$
$L_i, L_j = \sum_k \epsilon_{ijk} L_k$
Однако, нужно ещё доказать, что найдется такой базис, в котором матрица J будет диагональна.

Волчок Эйлера

Можно показать, что дианмику этой системы можно привести к одному уравнению:

$\dot{L}_1 = \sqrt{\alpha L_1^4 + \beta L_1^2 + \gamma}$.
Это уравнение обладает точным решением, выражающимся через эллиптические функции Якоби.

К этому можно прийти, зная сохраняющиеся величины:
$H = E$,
$K = |\vec{L}|^2$

Математическая физика + биология = ?

1980 г. Englander. Была предложена модель, описывающая внутреннюю динамику ДНК. Было доказано существование открытых состояний.

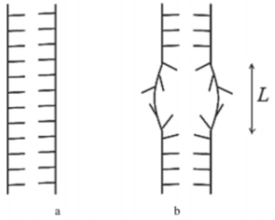


Fig. II.27. Open (a) and closed (b) states of the double-helix DNA (Yakushevich, 2004)

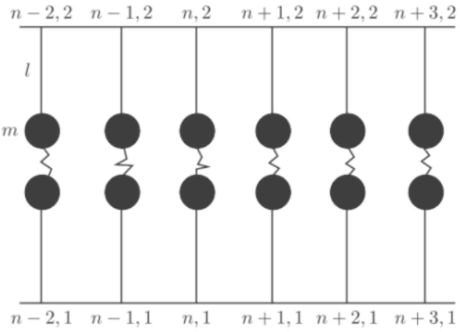
2004 г. Якушевич. Математическая формулировка этого процесса. Используется аналогия между молекулой ДНК и цепочки соединенных осцилляторов.

Математическая физика + биология = ?

Уравнения движения для такой цепочки:

$$J\ddot{\phi}_n = K(\phi_{n+1} - 2\phi_n + \phi_{n-1}) - mgh\sin\phi_n,$$

где ϕ_n - отклонение по углу, J - момент инерции маятника, K - коэф-т жесткости цепи.



Математическая физика + биология = ?

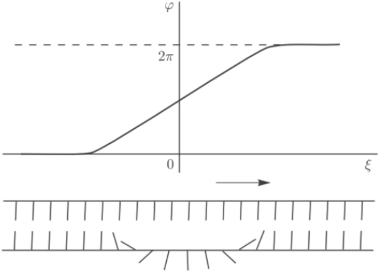
В пределе при $n \mapsto \infty$ получим уравнение синус-Гордона:

$$\phi_{tt} - \phi_{xx} + \sin\phi = 0$$

Эта система является интегрируемой. Точное решение:
$\phi(x, t) = 4\arctan(exp(\frac{\gamma(x-vt)}{d}))$

Математическая физика + биология = ?

Однако, эта модель не описывает вращение мобильность второй цепи ДНК.



.

Как с этим бороться?

Математическая физика + биология = ?

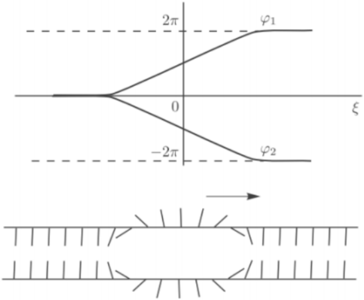
1) Нужно записать уравнения движения для двух цепочек.
2) Добавить перекрестное слагаемое, отвечающее взаимодействию цепочек.
Из таких рассуждений можно записать следующую систему:

$$\phi_{tt}^{(1)} = \phi_{xx}^{(1)} - (2\sin\phi^{(1)} - \sin(\phi^{(1)} + \phi^{(2)}))$$
$$\phi_{tt}^{(2)} = \phi_{xx}^{(2)} - (2\sin\phi^{(2)} - \sin(\phi^{(1)} + \phi^{(2)}))$$

Решение: $\phi_1 = -\phi_2 = 4\arctan(exp(q(x - vt)))$.

Математическая физика + биология = ?

И действительно, решение стало отвечать движению двух цепочек:



Таким образом, интегрируемые системы предоставляют точное решение модели, призванной описывать поведение ДНК.