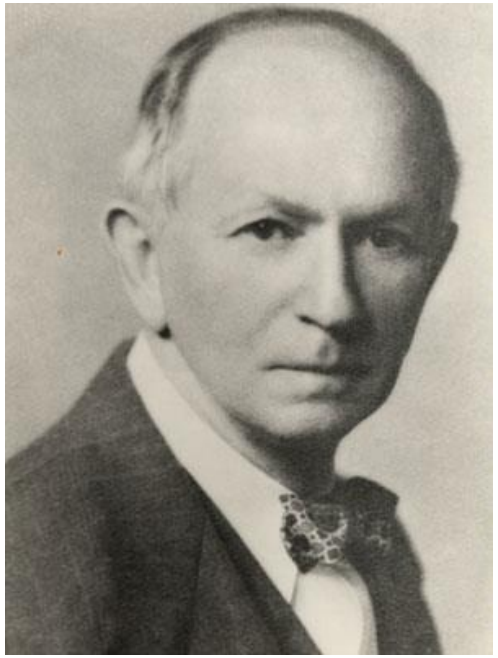
  

Модели, описываемые двумя обыкновенными дифференциальными уравнениями

Доц. Татьяна Юрьевна Плюснина
E-mail: plusn@yandex.ru

http://mathbio.ru

Модель Лотки



Альфред
Джеймс Лотка
(1880 –1949)

Модель Вольтерры

Вито Вольтерра
(1860 — 1940)

Исследование системы 2-х дифференциальных уравнений

Нелинейная система

$$\frac{dx}{dt} = P(x,y)$$
$$\frac{dy}{dt} = Q(x,y)$$

1. Стационарные состояния

$$P(x,y) = 0 \qquad Q(x,y) = 0 \quad \Rightarrow \quad (\bar{x}_1, \bar{y}_1),\ (\bar{x}_2, \bar{y}_2),\ \ldots$$

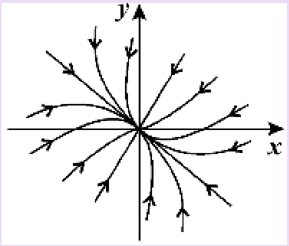
2. Коэффициенты линеаризации

$$a = P_x{}'(\bar{x},\bar{y}) \qquad b = P_y{}'(\bar{x},\bar{y})$$
$$c = Q_x{}'(\bar{x},\bar{y}) \qquad d = Q_y{}'(\bar{x},\bar{y})$$

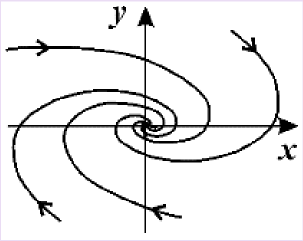
3. Характеристические числа

$$\lambda_{1,2} = \frac{(a+d) \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4(ad - bc)}}{2}$$

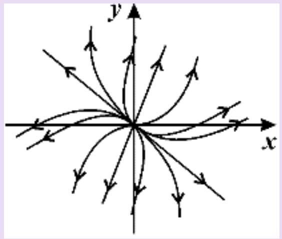
4. Типы динамического поведения вблизи $(\bar{x},\bar{y})$



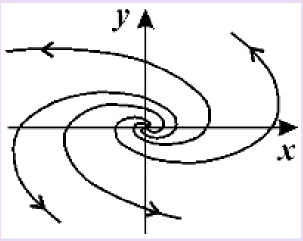
Устойчивый узел



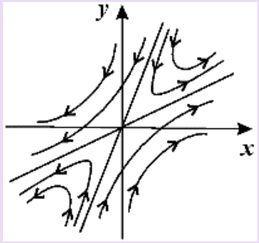
Устойчивый фокус



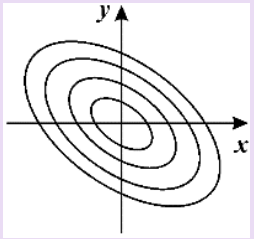
Неустойчивый узел



Неустойчивый фокус



Седло



Центр

Система линейных химических реакций

$$\xrightarrow{v_1} \boldsymbol{X} \xrightarrow{v_2} \boldsymbol{Y} \xrightarrow{v_3}$$

Вещество $\boldsymbol{X}$

- притекает извне с постоянной скоростью v_1
- превращается в вещество $\boldsymbol{Y}$ со скоростью $v_2 = k_2\,\boldsymbol{X}$

Вещество $\boldsymbol{Y}$

- образуется из вещества $\boldsymbol{X}$ со скоростью $v_2 = k_2\,\boldsymbol{X}$
- выводится из сферы реакции со скоростью $v_3 = k_3\,\boldsymbol{Y}$

$$\frac{dx}{dt} = k_1 - k_2 x$$
$$\frac{dy}{dt} = k_2 x - k_3 y$$

Линейная
автономная система
2-х ОДУ

$$\frac{dx}{dt} = k_1 - k_2 x$$
$$\frac{dy}{dt} = k_2 x - k_3 y$$

Исследование модели

$$\xrightarrow{v_1} \boldsymbol{X} \xrightarrow{v_2} \boldsymbol{Y} \xrightarrow{v_3}$$

Стационарное состояние системы

$$\frac{dx}{dt} = 0$$
$$\frac{dy}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow$$

$$k_1 - k_2 x = 0$$
$$k_2 x - k_3 y = 0$$

$$\Rightarrow$$

$$\bar{x} = \frac{k_1}{k_2}$$
$$\bar{y} = \frac{k_1}{k_3}$$

Тип стационарного состояния

$$\frac{dx}{dt} = k_1 - k_2 x$$
$$\frac{dy}{dt} = k_2 x - k_3 y$$

Характеристический определитель

$$\begin{vmatrix} -k_2 - \lambda & 0 \\ k_2 & -k_3 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Характеристическое уравнение

$$(k_2 + \lambda)(k_3 + \lambda) = 0$$

Корни характеристического уравнения

$$\lambda_1 = -k_2 \qquad \lambda_2 = -k_3$$

Корни действительные, $\lambda_{1,2} < 0$

устойчивый узел

Фазовый портрет

$$\frac{dx}{dt} = k_1 - k_2 x$$
$$\frac{dy}{dt} = k_2 x - k_3 y$$

Главные изоклины

$$\frac{dy}{dx} = \frac{k_2 x - k_3 y}{k_1 - k_2 x} = \mathrm{tg}\alpha$$

Уравнение изоклины горизонтальных касательных

$\alpha = 0°$

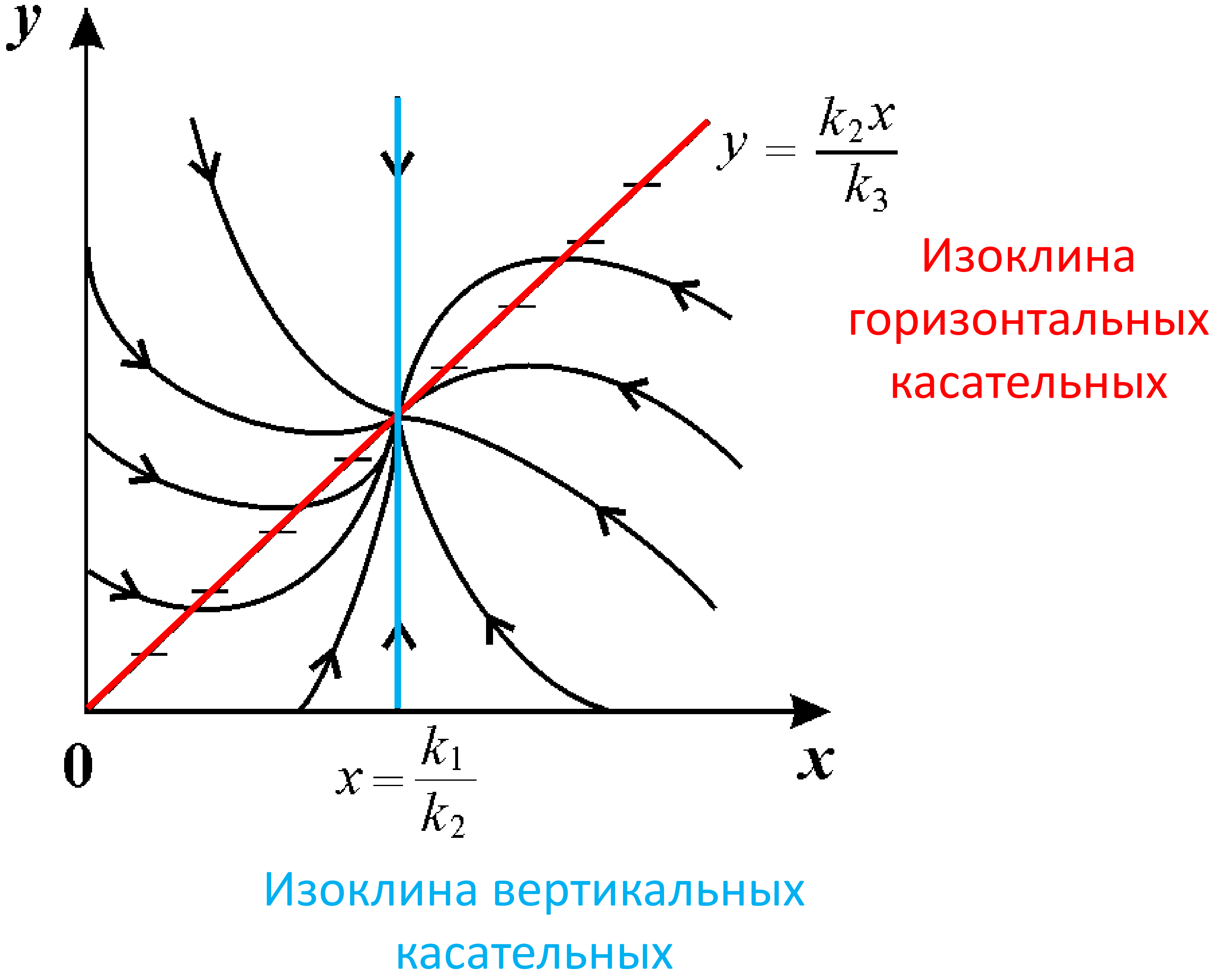
$$\frac{dy}{dx} = 0, y = \frac{k_2 x}{k_3}$$

Уравнение изоклины вертикальных касательных

$\alpha = 90°$

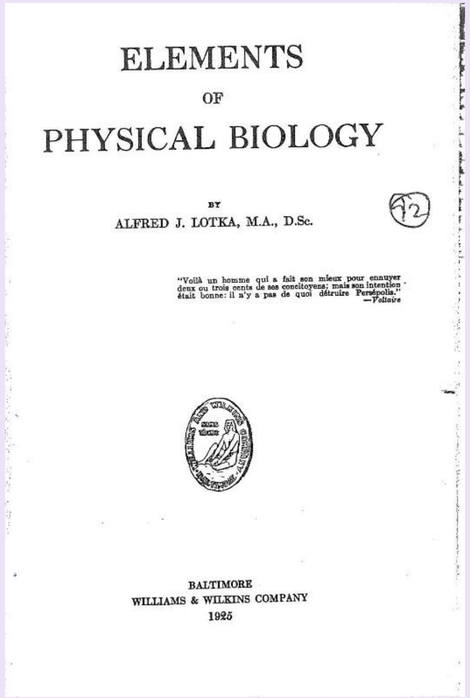
$$\frac{dy}{dx} = \infty, x = \frac{k_1}{k_2}$$

Фазовый портрет



$$\frac{dx}{dt} = k_1 - k_2 x$$
$$\frac{dy}{dt} = k_2 x - k_3 y$$

Кинетические уравнения Лотки



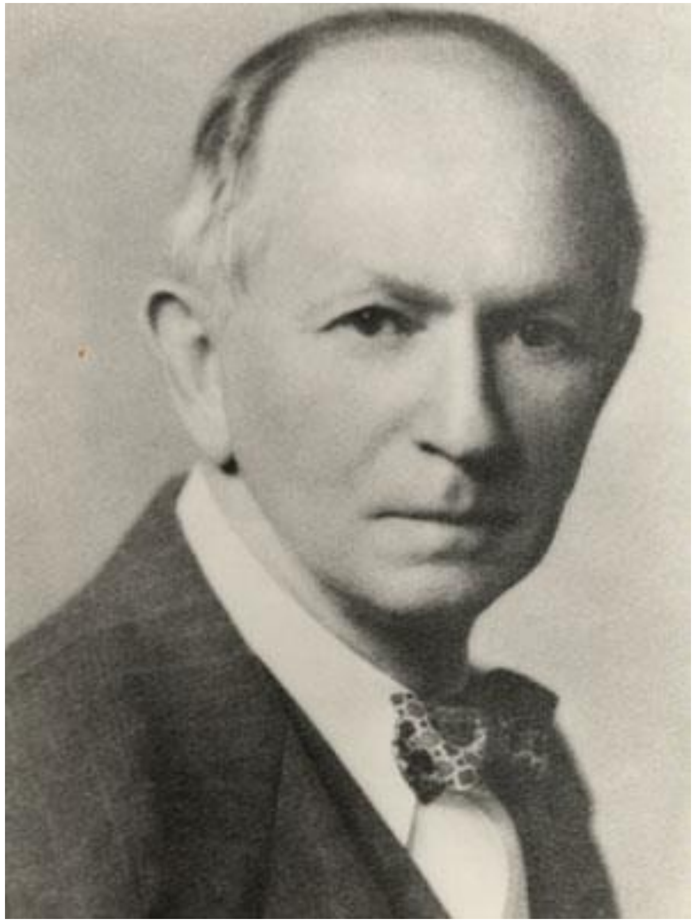
ELEMENTS
OF
PHYSICAL BIOLOGY

BY
ALFRED J. LOTKA, M.A., D.Sc.

"Voilà un homme qui a fait son mieux pour ennuyer deux ou trois cents de ses concitoyens; mais son intention était bonne: il n'y a pas de quoi détruire Persépolis."
—Voltaire

BALTIMORE
WILLIAMS & WILKINS COMPANY
1925

Elements of Physical Biology, 1925



Альфред Джеймс Лотка
(1880 –1949)

МОДЕЛЬ ЛОТКИ

$$\rightarrow A \xrightarrow{\quad k_0 \quad} X \xrightarrow{\quad k_1 \quad} \overleftarrow{Y} \xrightarrow{\quad k_2 \quad} B$$

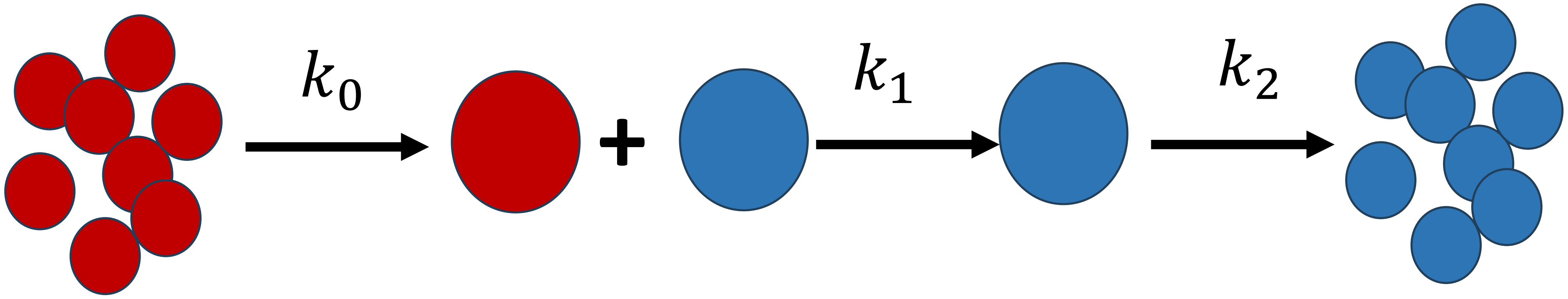
- Пусть в некотором объеме находится в избытке вещество ***A***

- Молекулы ***A*** с некоторой постоянной скоростью k_0 превращаются в молекулы вещества ***X***

- Вещество ***X*** может превращаться в вещество ***Y*** с константой скорости k_1, причем скорость этой реакции тем больше, чем больше концентрация вещества ***Y*** (реакция второго порядка).

- Молекулы ***Y*** в свою очередь необратимо распадаются с константой k_2, в результате образуется вещество ***B***

МОДЕЛЬ ЛОТКИ



$$\to A \xrightarrow{k_0} X \xrightarrow{k_1} Y \xrightarrow{k_2} B$$

субстрат продукт

Активация продуктом

МОДЕЛЬ ЛОТКИ

$$\rightarrow A \xrightarrow{k_0} X \xrightarrow{k_1} \overleftarrow{Y} \xrightarrow{k_2} B$$

Система уравнений, описывающих реакцию

$$\frac{dx}{dt} = k_0 - k_1 xy$$
$$\frac{dy}{dt} = k_1 xy - k_2 y$$

$P\ (x, y)$

$Q\ (x, y)$

$$\frac{dx}{dt} = k_0 - k_1 xy$$
$$\frac{dy}{dt} = k_1 xy - k_2 y$$

Стационарное состояние системы

$$P\,(x, y) = 0$$
$$Q\,(x, y) = 0$$

$$\Rightarrow$$

$$k_0 - k_1 xy = 0$$
$$k_1 xy - k_2 y = 0$$

$$\Rightarrow$$

$$\bar{x} = \frac{k_2}{k_1}$$
$$\bar{y} = \frac{k_0}{k_2}$$

Линеаризация системы вблизи стационарного состояния

$$\frac{dx}{dt} = k_0 - k_1xy$$
$$\frac{dy}{dt} = k_1xy - k_2y$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -k_1\bar{y} = -\frac{k_1k_0}{k_2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -k_1\bar{x} = -k_2$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = k_1\bar{y} = \frac{k_1k_0}{k_2}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = k_1\bar{x} - k_2 = 0$$

Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -\dfrac{k_1 k_0}{k_2} - \lambda & -k_2 \\ \dfrac{k_1 k_0}{k_2} & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Характеристический определитель

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{k_1 k_0}{k_2} \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = -k_2$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{k_1 k_0}{k_2} \qquad \frac{\partial Q}{\partial y} = 0$$

Коэффициенты линеаризации

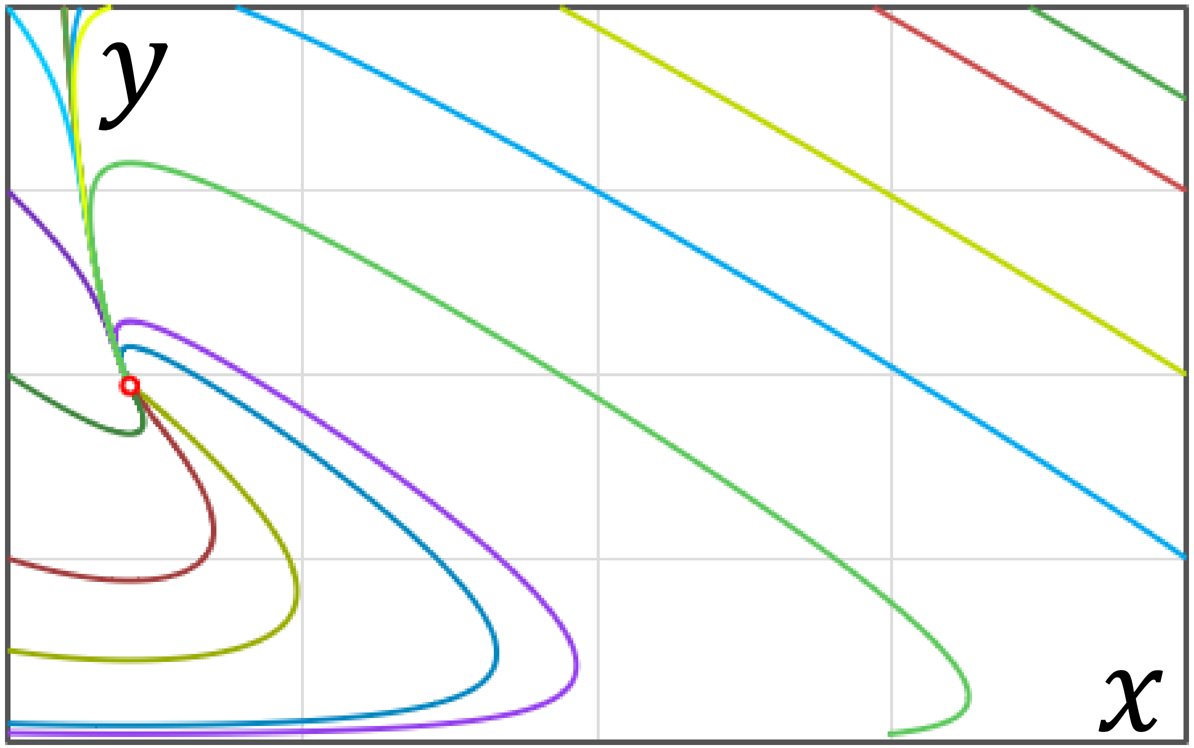
$$\lambda^2 + \lambda \frac{k_1 k_0}{k_2} + k_0 k_1 = 0$$

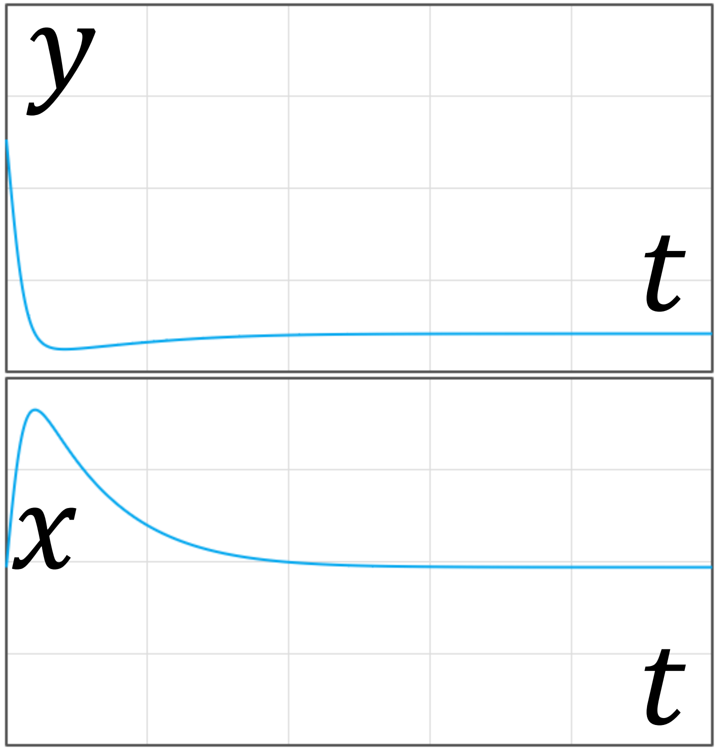
Характеристическое уравнение

Если $\left(\frac{k_1 k_0}{k_2}\right)^2 > 4k_0 k_1$ Корни действительные, $\mathrm{Re}\ \lambda_{1,2} < 0$

или $k_2 < \frac{\sqrt{k_0 k_1}}{2}$

особая точка – ***устойчивый узел***, монотонное приближение к стационарному состоянию





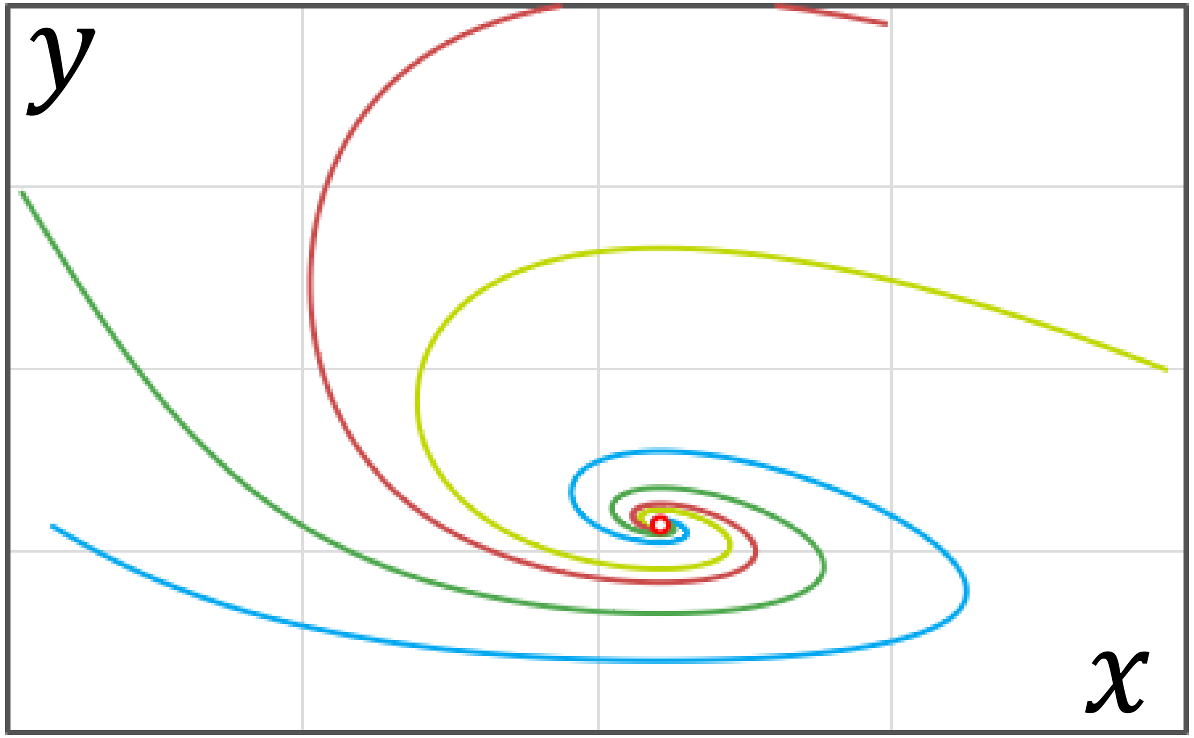
Если $\left(\frac{k_1 k_0}{k_2}\right)^2 < 4k_0 k_1$

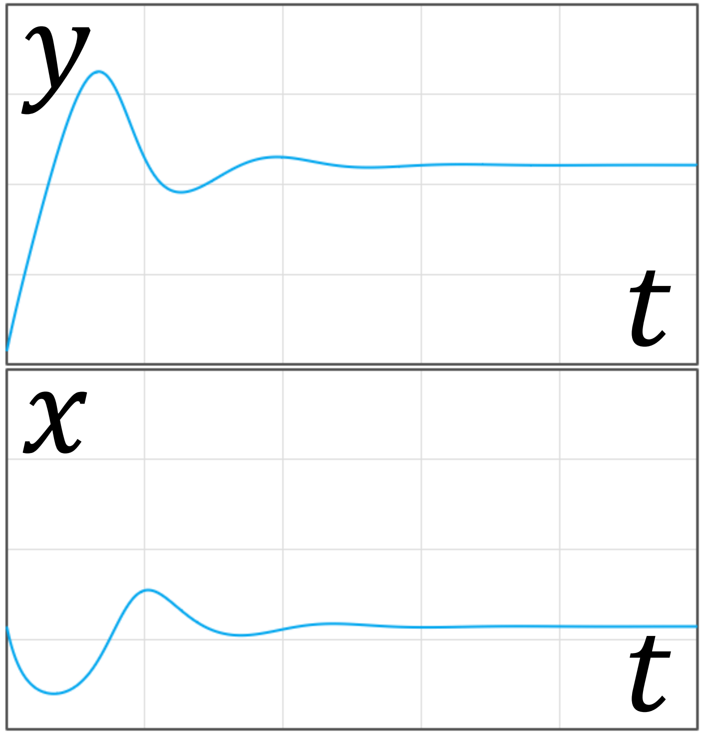
или $k_2 > \frac{\sqrt{k_0 k_1}}{2}$

Корни комплексно-сопряженные,

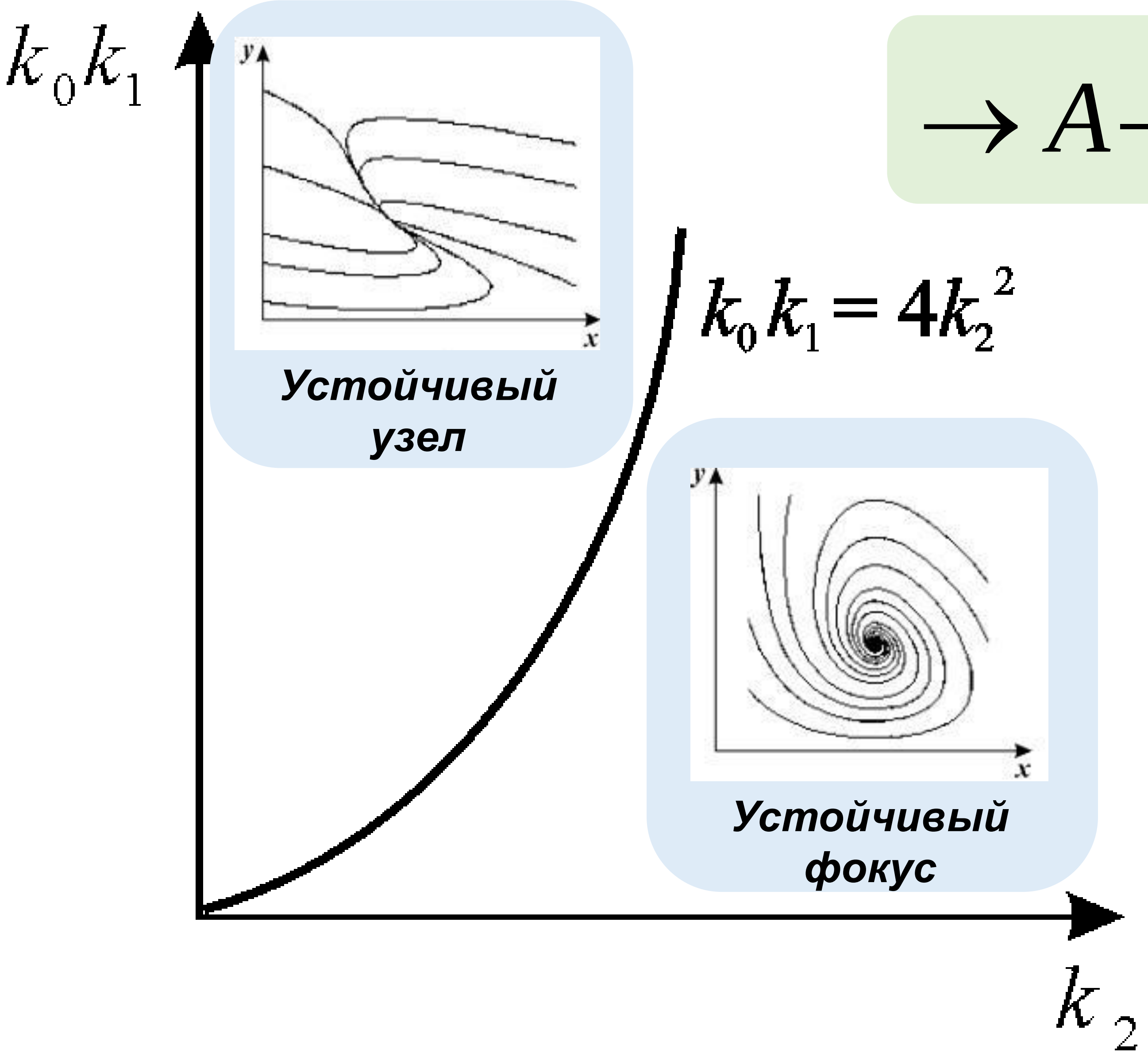
Re $\lambda_{1,2} < 0$

особая точка – ***устойчивый фокус***, затухающие колебания





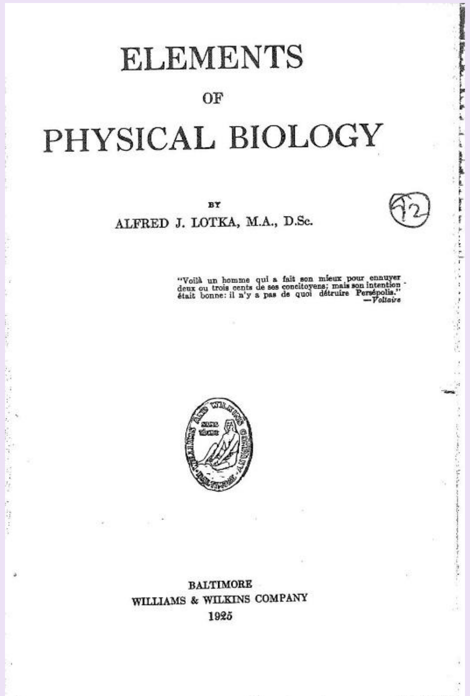
Параметрическая диаграмма



$$\rightarrow A \xrightarrow{k_0} X \xrightarrow{k_1} \overleftarrow{Y} \xrightarrow{k_2} B$$

$$\frac{dx}{dt} = k_0 - k_1 xy$$
$$\frac{dy}{dt} = k_1 xy - k_2 y$$

Кинетические уравнения Лотки


ELEMENTS
OF
PHYSICAL BIOLOGY

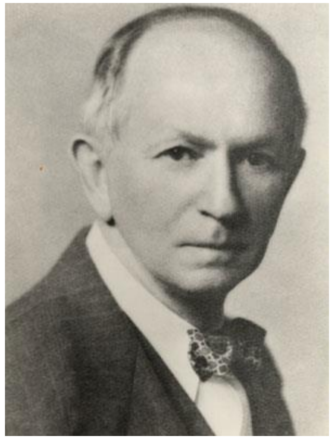
BY
ALFRED J. LOTKA, M.A., D.Sc.

"Voilà un homme qui a fait son mieux pour ennuyer deux ou trois cents de ses concitoyens; mais son intention était bonne: il n'y a pas de quoi détruire Persépolis."
—*Voltaire*

BALTIMORE
WILLIAMS & WILKINS COMPANY
1925

Elements of Physical Biology, 1925

$$\frac{dx}{dt} = k_0 - k_1 xy$$
$$\frac{dy}{dt} = k_1 xy - k_2 y$$



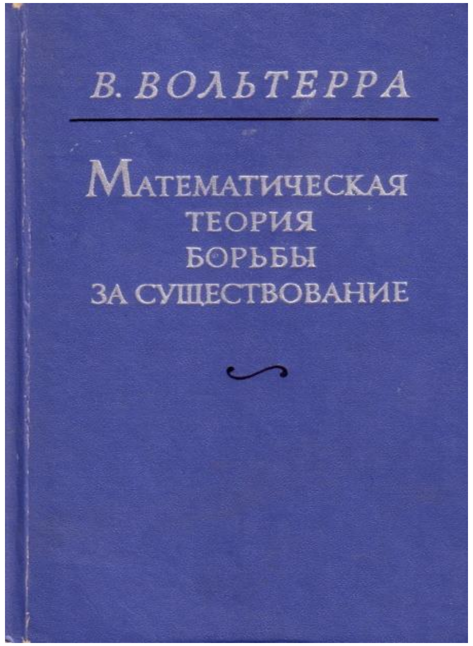
Альфред
Джеймс Лотка
(1880 –1949)

Химические реакции

Взаимодействие особей

...

Модель «Хищник-жертва»



Volterra V. Variazone e fluttuazini del numero d’individui in specie animali conviventi. — Mem. Accad. naz. Lincei. Ser. 6, 1926.

Вито Вольтерра
(1860 — 1940)

Vito Volterra.
Lecons sur la Theorie Mathematique de la Lutte pour la Vie. Paris, 1931

«Изменчивость и колебания численности особей у совместно обитающих видов животных»

Рождение модели «Хищник-жертва»

Умберто Д’Анкона
(1896-1964)

- Беседы с зоологом Умберто Д’Анкона
- Статистика рыбных рынков на Адриатике

Вито Вольтерра
(1860 — 1940)

La Lotta per l'Esistenza (1942)
«Борьба за существование»

(Посвящено Вито Вольтерре)

Модель Вольтерры

x  y 

в некотором ограниченном ареале живут хищники и жертвы

Зайцы питаются растительной пищей

$$\frac{dx}{dt} \sim x$$

Гибель зайцев

$$\frac{dx}{dt} \sim -xy$$

Волки могут питаться лишь зайцами

$$\frac{dy}{dt} \sim xy$$

Процесс естественной смертности волков

$$\frac{dy}{dt} \sim -y$$

Модель Вольтерры



$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon_x \cdot x - \gamma_{xy} \cdot x \cdot y$$

$$\frac{dy}{dt} = \gamma_{yx} \cdot x \cdot y - \varepsilon_y \cdot y$$


Модель Вольтерры

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon_x \cdot x - \gamma_{xy} \cdot x \cdot y$$

$$\frac{dy}{dt} = \gamma_{yx} \cdot x \cdot y - \varepsilon_y \cdot y$$

- *x* — численность жертв (травоядных)

- *y* — численность хищников

- ε_x — вероятность того, что травоядные размножатся
- γ_{xy} — вероятность того, что травоядное будет съедено хищником

- γ_{yx}— вероятность того, что хищнику хватит еды на дальнейшее размножение
- ε_y — вероятность того, что хищник умрет

Стационарные состояния системы

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon_x \cdot x - \gamma_{xy} \cdot x \cdot y$$
$$\frac{dy}{dt} = \gamma_{yx} \cdot x \cdot y - \varepsilon_y \cdot y$$

$$P\,(x, y) = 0$$
$$Q\,(x, y) = 0$$

$$\varepsilon_x \cdot x - \gamma_{xy} \cdot x \cdot y = 0$$
$$\gamma_{yx} \cdot x \cdot y - \varepsilon_y \cdot y = 0$$

I. $\bar{x}_1 = 0 \quad \bar{y}_1 = 0$

II. $\bar{x}_2 = \dfrac{\varepsilon_y}{\gamma_{yx}} \quad \bar{y}_2 = \dfrac{\varepsilon_x}{\gamma_{xy}}$

Линеаризация системы вблизи стационарного состояния

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon_x \cdot x - \gamma_{xy} \cdot x \cdot y$$
$$\frac{dy}{dt} = \gamma_{yx} \cdot x \cdot y \ - \varepsilon_y \cdot y$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \varepsilon_x - \gamma_{xy}\bar{y}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\gamma_{xy}\bar{x}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \gamma_{yx}\bar{y}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = -\varepsilon_y + \gamma_{yx}\bar{x}$$

Характеристические уравнения для линеаризованной системы

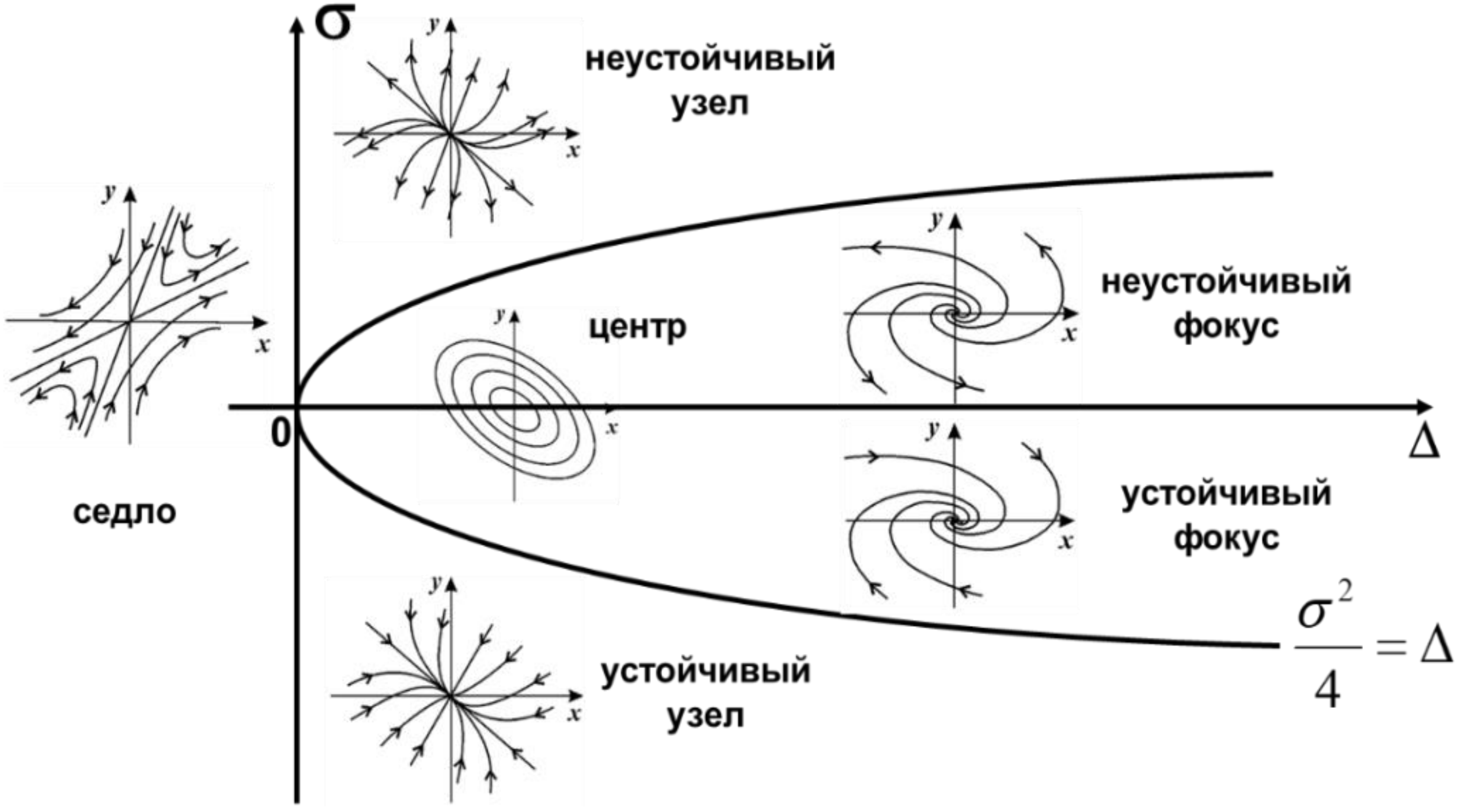
$$\begin{vmatrix} \varepsilon_x - \lambda & 0 \\ 0 & -\varepsilon_y - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -\dfrac{\varepsilon_y \gamma_{xy}}{\gamma_{yx}} \\ \dfrac{\varepsilon_x \gamma_{yx}}{\gamma_{xy}} & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 - \lambda(\varepsilon_x - \varepsilon_y) - \varepsilon_x \varepsilon_y = 0$$

$$\lambda^2 + \varepsilon_x \varepsilon_y = 0$$

Определение типа стационарного состояния



$$\lambda^2 - \sigma\lambda + \Delta = 0$$

$\Delta < 0$,
особая точка – седло

$\sigma = 0, \Delta > 0$,
особая точка – центр

Определение типа стационарного состояния

$$\lambda^2 - \sigma\lambda + \Delta = 0$$

$$\lambda^2 - \lambda(\varepsilon_x - \varepsilon_y) - \varepsilon_x\varepsilon_y = 0$$

$$\sigma = (\varepsilon_x - \varepsilon_y)$$

$$\Delta = -\varepsilon_x\varepsilon_y$$

$\Delta < 0,$

особая точка – седло

$\lambda_{1,2}$ – действительные, разных знаков

$$\lambda^2 + \varepsilon_x\varepsilon_y = 0$$

$$\sigma = 0$$

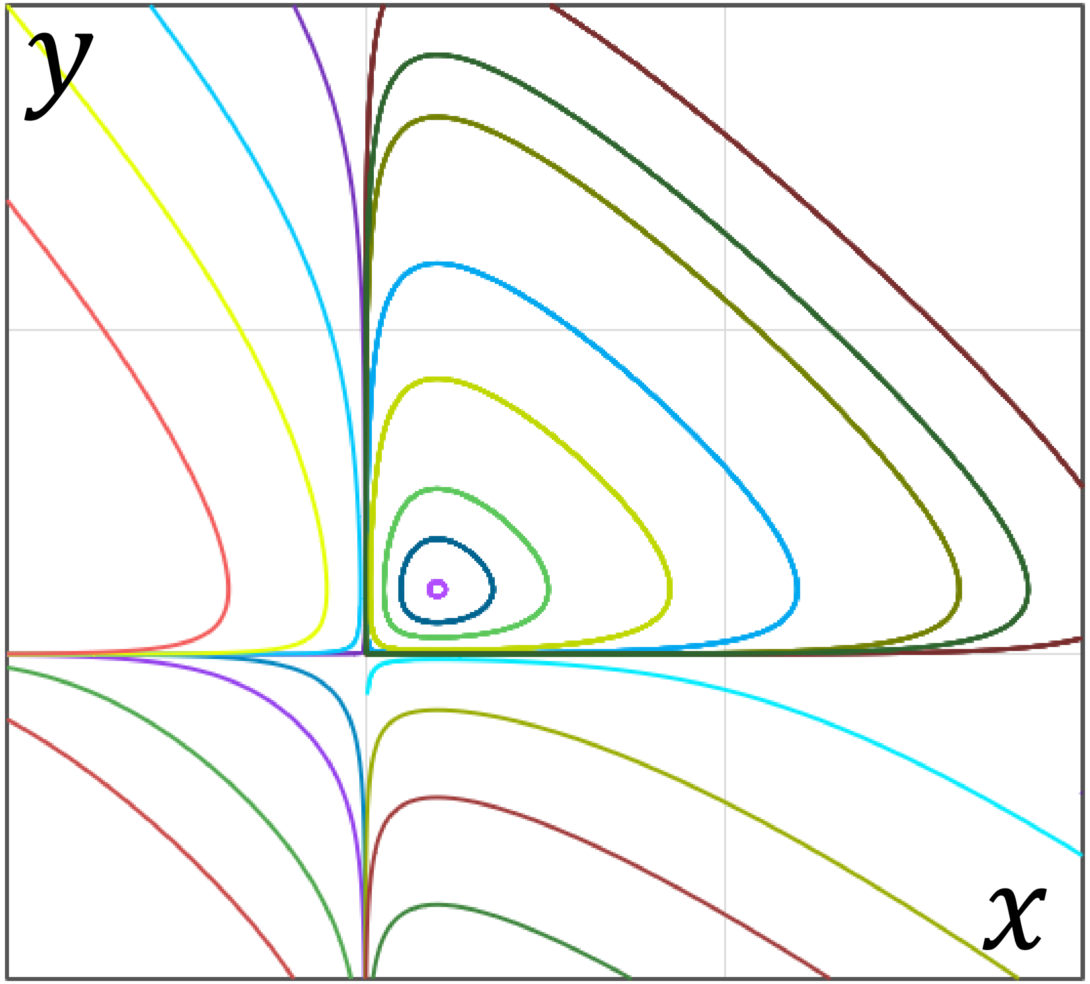
$$\Delta = \varepsilon_x\varepsilon_y$$

$\sigma = 0,\ \Delta > 0,$

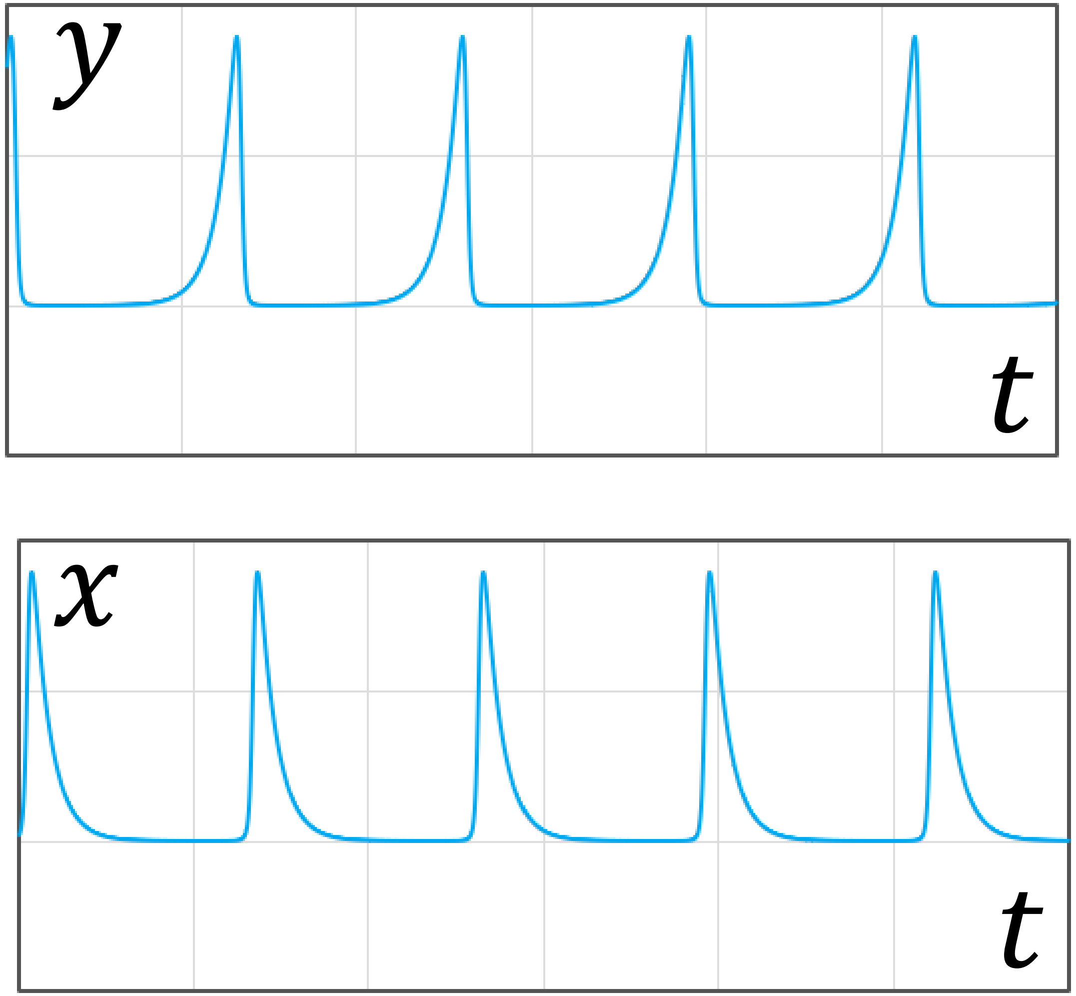
особая точка – центр

$\lambda_{1,2}$ – чисто мнимые

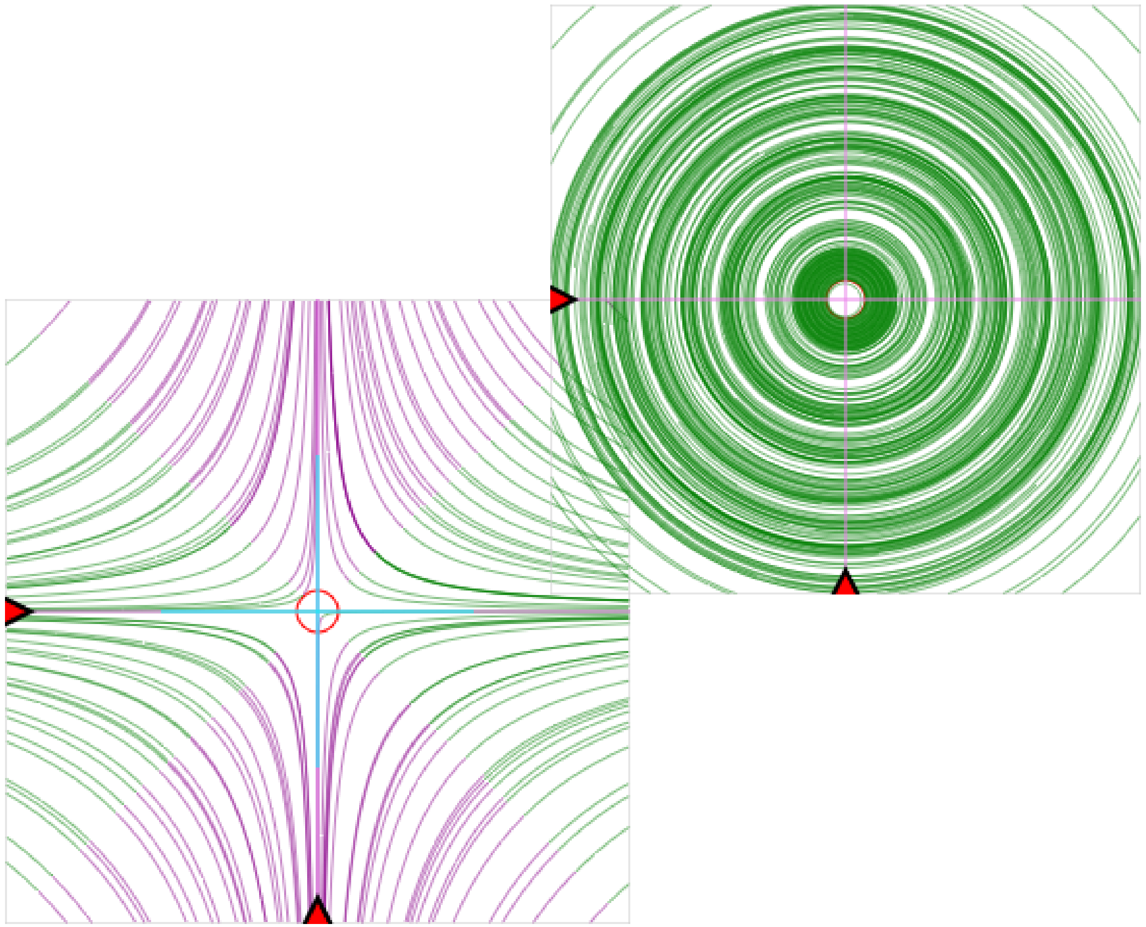
Фазовый портрет



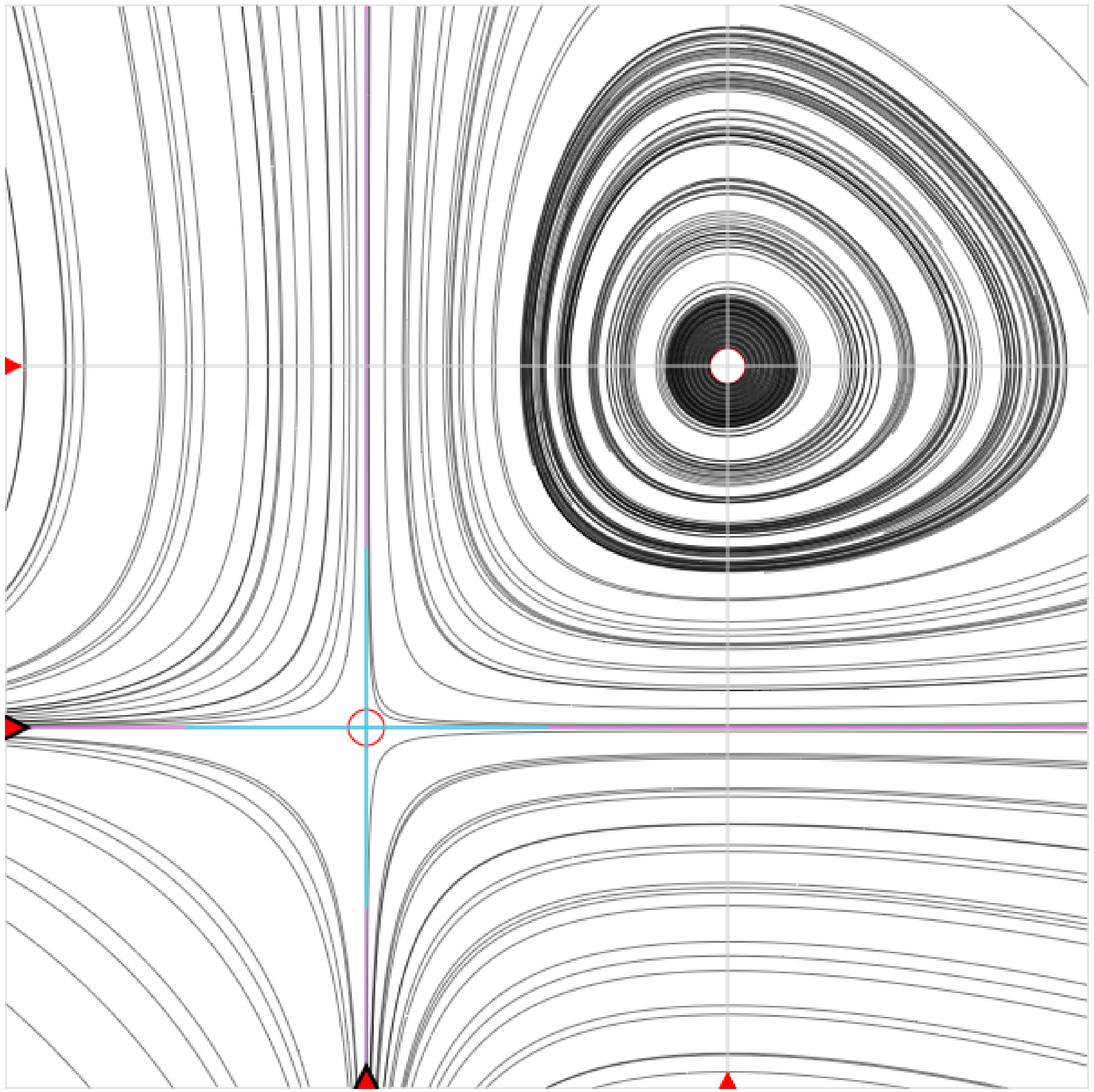
Кинетические кривые



Линеаризованная система в малой окрестности стационарных состояний



Нелинейная система

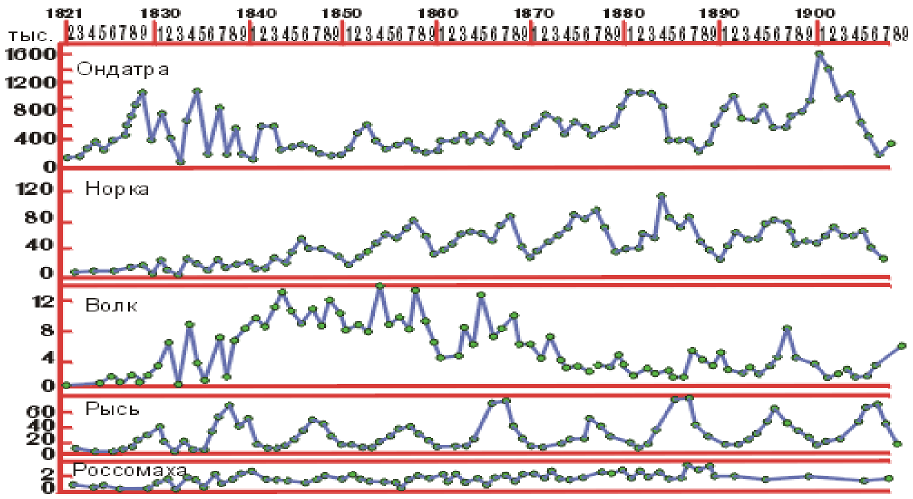


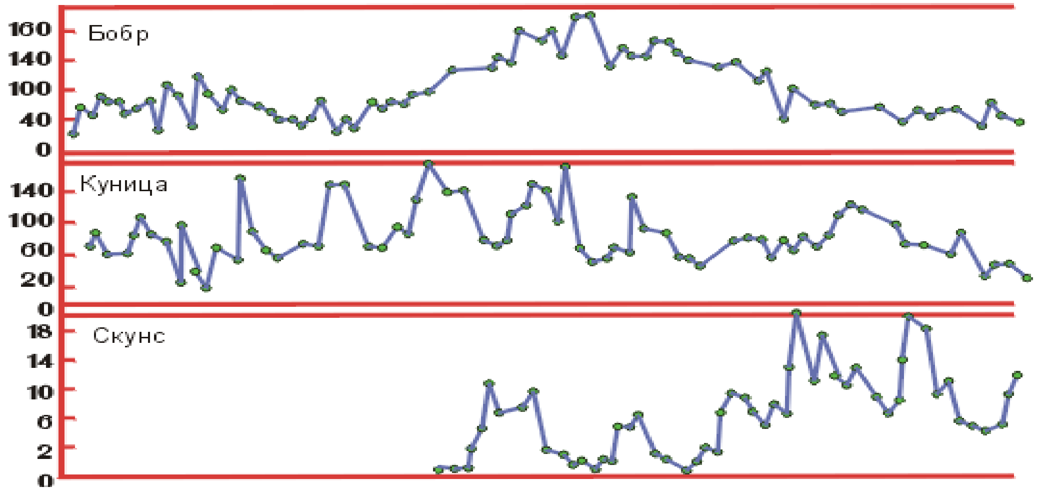
Предположения модели Вольтерры

- Популяция жертв всегда имеет достаточное количество пищи.
- Получение пищи в популяции хищников полностью зависит от размера популяции жертв.
- Скорость изменения популяции пропорциональна ее размеру.
- Окружающая среда не меняется в пользу одного вида, а генетическая адаптация несущественна.
- У хищников нет ограничений в потреблении пищи.
- Обе популяции можно описать одной переменной (то есть, популяции не имеют пространственного или возрастного распределения, которое может вносить вклад в динамику).

Модель Вольтерры показывает важные свойства популяций хищников и жертв:

- Динамика популяций хищников и жертв имеет тенденцию к колебаниям. Колебания численности хищников и жертв наблюдаются в естественных популяциях.

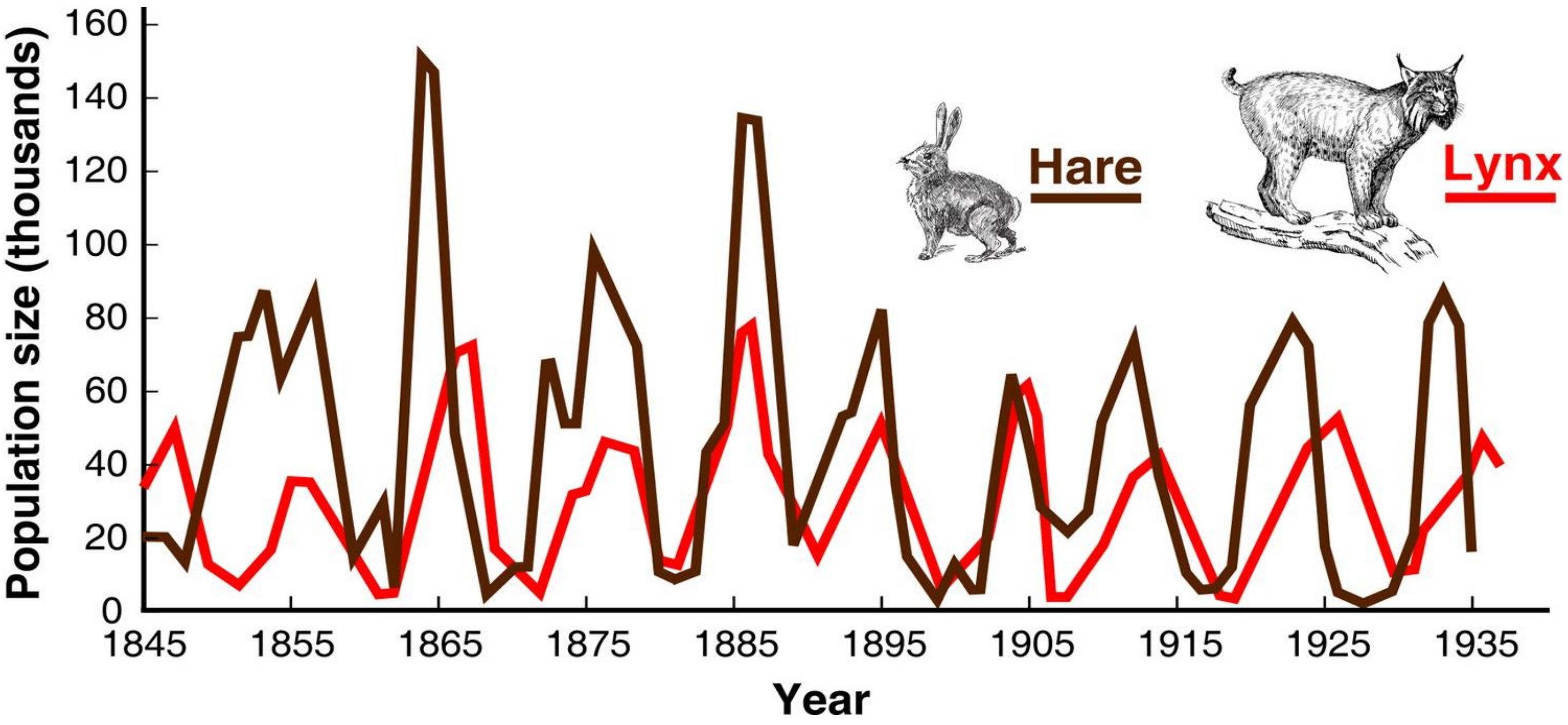


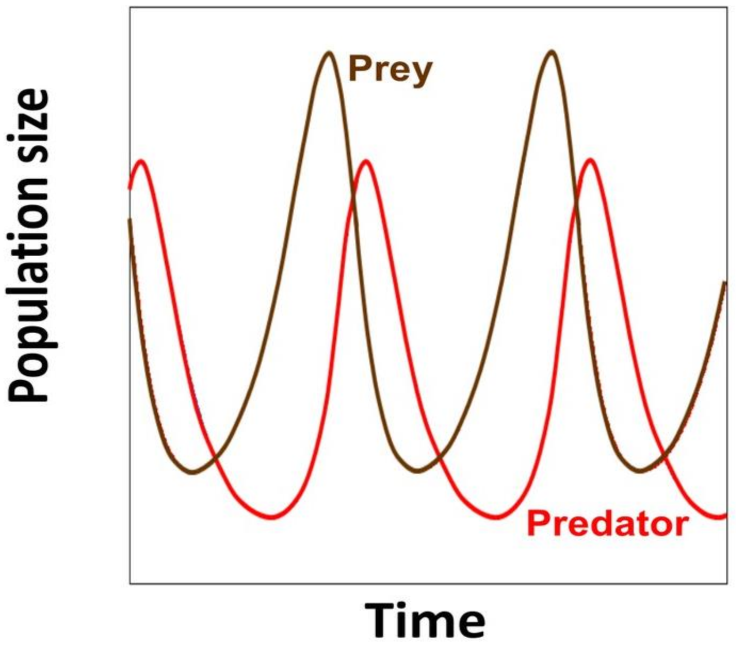


Численность пушных зверей по данным компании Гудзонова залива.
(Сетон-Томсон, Торонто, 1911)

Кривые численности зайца и рыси в Канаде

(по К. Вилли, В. Детье, 1974)





Модель Лотки-Вольтерры

Модель Вольтерры показывает важные свойства популяций хищников и жертв:

- Стационарная численность жертв $\bar{x}$ зависит от параметров хищника, а стационарная численность хищника $\bar{y}$ — от параметров жертв.

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon_x \cdot x - \gamma_{xy} \cdot x \cdot y$$

$$\frac{dy}{dt} = \gamma_{yx} \cdot x \cdot y - \varepsilon_y \cdot y$$

$$\bar{x} = \frac{\varepsilon_y}{\gamma_{yx}} \qquad \bar{y} = \frac{\varepsilon_x}{\gamma_{xy}}$$

Увеличение скорости роста жертв, ε_x, приводит к увеличению стационарной численности хищника, но не стационарной численности жертв.
Улучшение среды обитания для жертвы выгодно хищнику, а не жертве

Как учесть самоограничение численности?

Модель Вольтерры

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon_x \cdot x - \gamma_{xy} \cdot x \cdot y$$
$$\frac{dy}{dt} = \gamma_{yx} \cdot x \cdot y \; - \varepsilon_y \cdot y$$

Модель Ферхюльста

$$\frac{dx}{dt} = a \cdot x - b \cdot x \cdot \mathrm{x}$$

- Численность популяции жертв не может расти до бесконечности даже в отсутствие хищников в силу ограниченности пищевых ресурсов, ареала существования и проч.

- Такие же «самоограничения» накладываются на популяцию хищников.

Модель Вольтерры с самоограничением



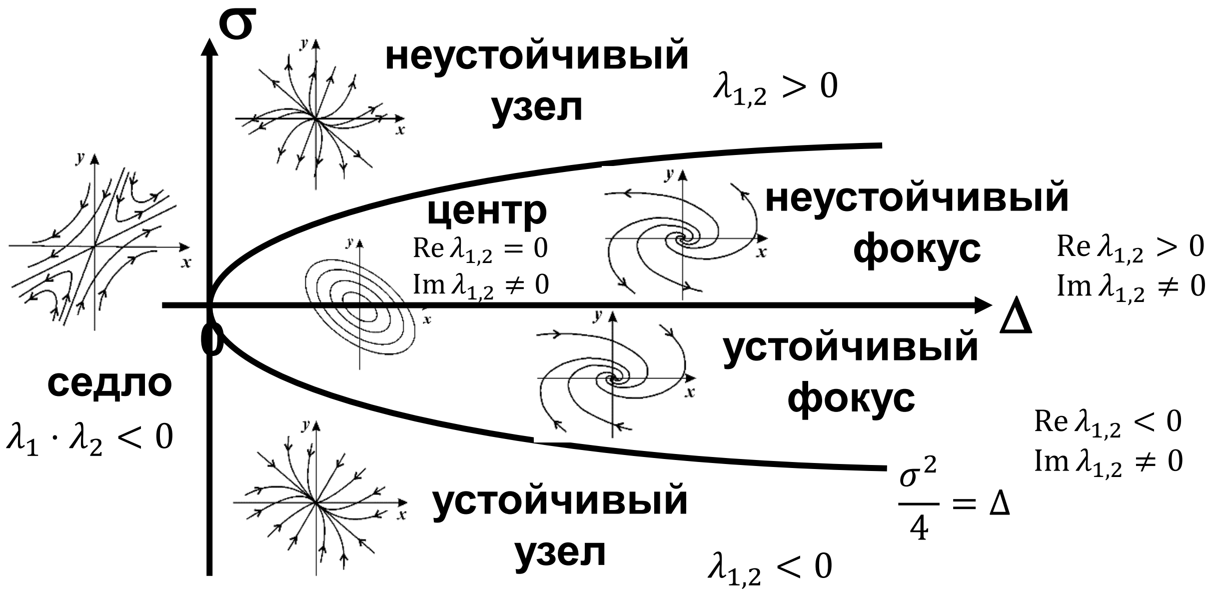
$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon_x \cdot x - \gamma_{xy} \cdot x \cdot y - \delta_x \cdot x \cdot x$$

$$\frac{dy}{dt} = \gamma_{yx} \cdot x \cdot y - \varepsilon_y \cdot y - \delta_y \cdot y \cdot y$$



Анализ модели

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon_x \cdot x - \gamma_{xy} \cdot x \cdot y - \delta_x \cdot x \cdot x$$
$$\frac{dy}{dt} = \gamma_{yx} \cdot x \cdot y - \varepsilon_y \cdot y - \delta_y \cdot y \cdot y$$



I. $\bar{x}_1 = 0$, $\bar{y}_1 = 0$

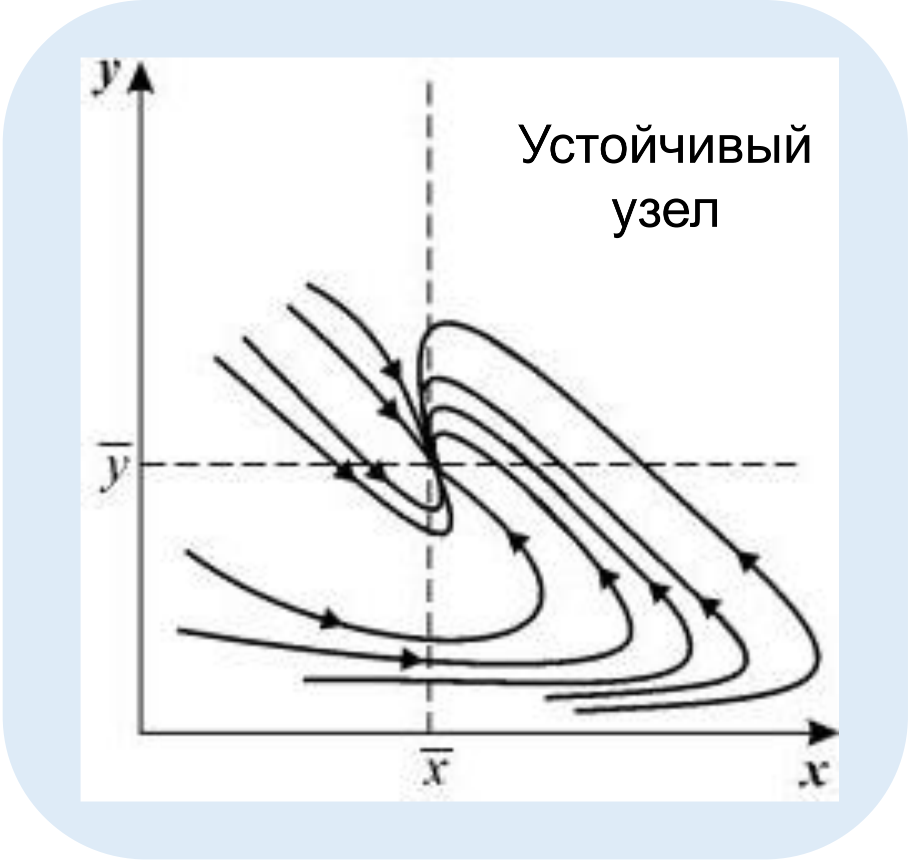
Корни действительные, $\lambda_{1,2} > 0$ — ***неустойчивый узел***

II.
$$\bar{x}_2 = \frac{\varepsilon_x \delta_y - \varepsilon_y \gamma_{xy}}{\delta_x \delta_y - \gamma_{yx} \gamma_{yx}}$$
$$\bar{y}_2 = \frac{\varepsilon_y \delta_x - \varepsilon_x \gamma_{yx}}{\delta_x \delta_y - \gamma_{yx} \gamma_{yx}}$$

1) Корни действительные, $\lambda_{1,2} < 0$ — ***устойчивый узел***

2) Корни комплексно-сопряженные, $\mathrm{Re}\,\lambda_{1,2} < 0$ — ***устойчивый фокус***

Фазовый портрет системы



Стационарное состояние асимптотически устойчиво, и решение устойчиво к малым изменениям правых частей уравнений.

Самоограничение популяции приводит к устойчивости ее численности.

Как сделать модель более реалистичной?

Скорость роста популяции жертв x зависит от:

- скорости размножения особей в отсутствие хищников ($\sim x$)
- влияния внутривидовой конкуренции за пищу при ограниченных ресурсах ($\sim \frac{x^2}{K}$)
- влияния хищников в предположении, что хищник перестает убивать, когда насыщается ($\sim \frac{xy}{D+x}$)

Как сделать модель более реалистичной?

Скорость роста популяции хищников y:

- Если для поддержания жизни одного хищника нужно J жертв, то популяция из x жертв сможет обеспечить пищей $\frac{x}{J}$ хищников
- Условие, что количество хищников не превышает критическую величину $\frac{x}{J}$, достигается, если

$$\frac{dy}{dt} = sy - sJ\frac{y^2}{x} \qquad (\bar{y} = \frac{x}{J})$$

sy характеризует рост численности хищников

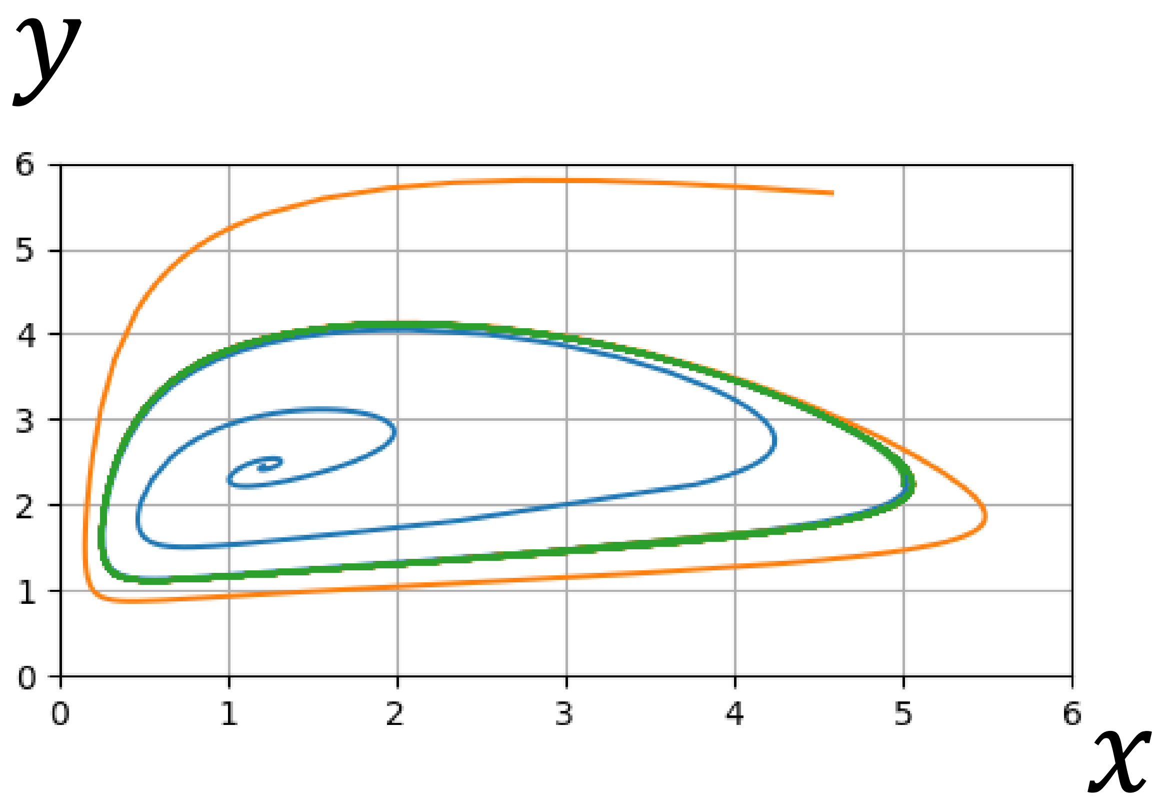
$sJ\frac{y^2}{x}$ характеризует гибель хищников при недостатке пищи

Модель «хищник-жертва» Холлинга-Тэннера

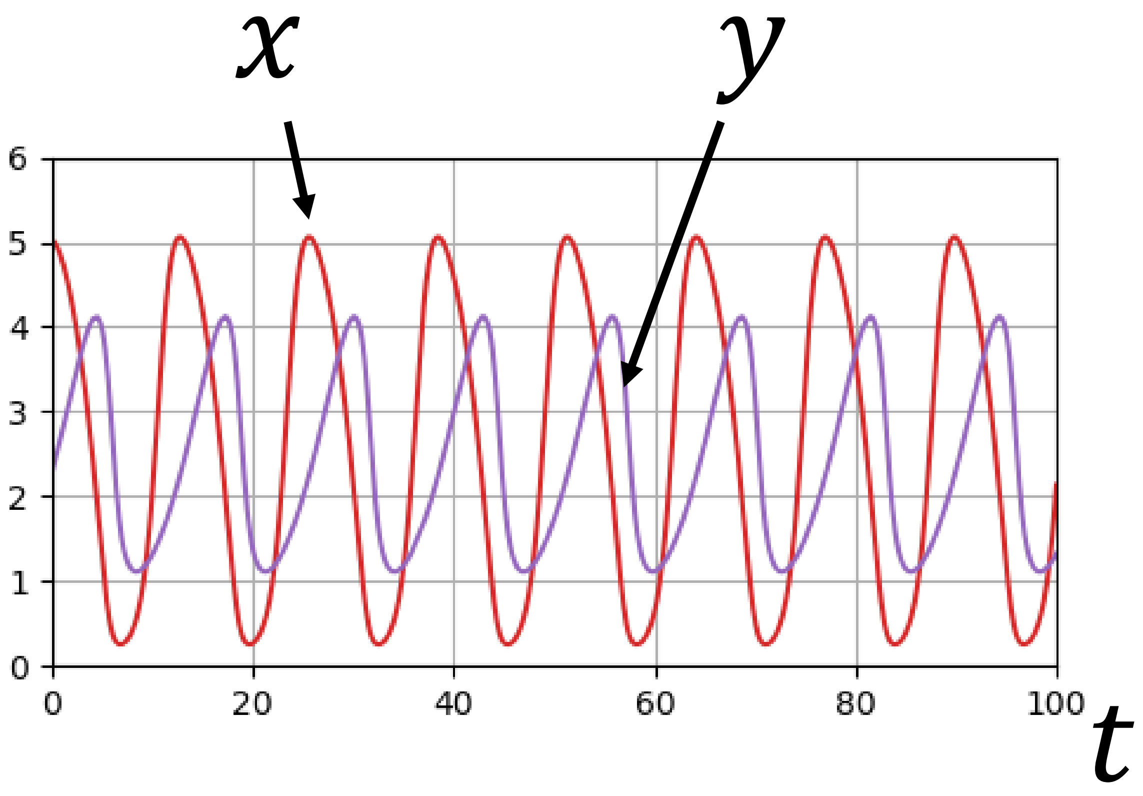
$$\frac{dx}{dt} = rx - r\frac{x^2}{K} - w\frac{xy}{D + x}$$

$$\frac{dy}{dt} = sy - sJ\frac{y^2}{x}$$

Фазовый портрет



Кинетические кривые

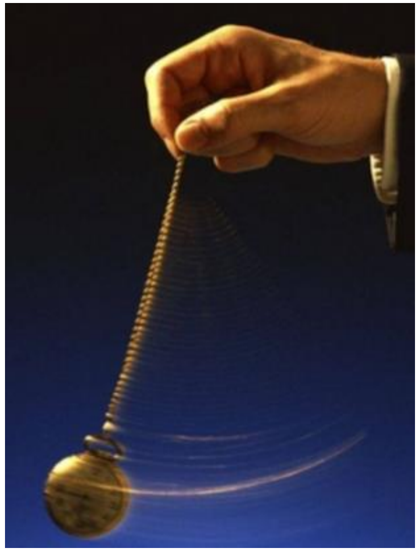


Типы динамического поведения:

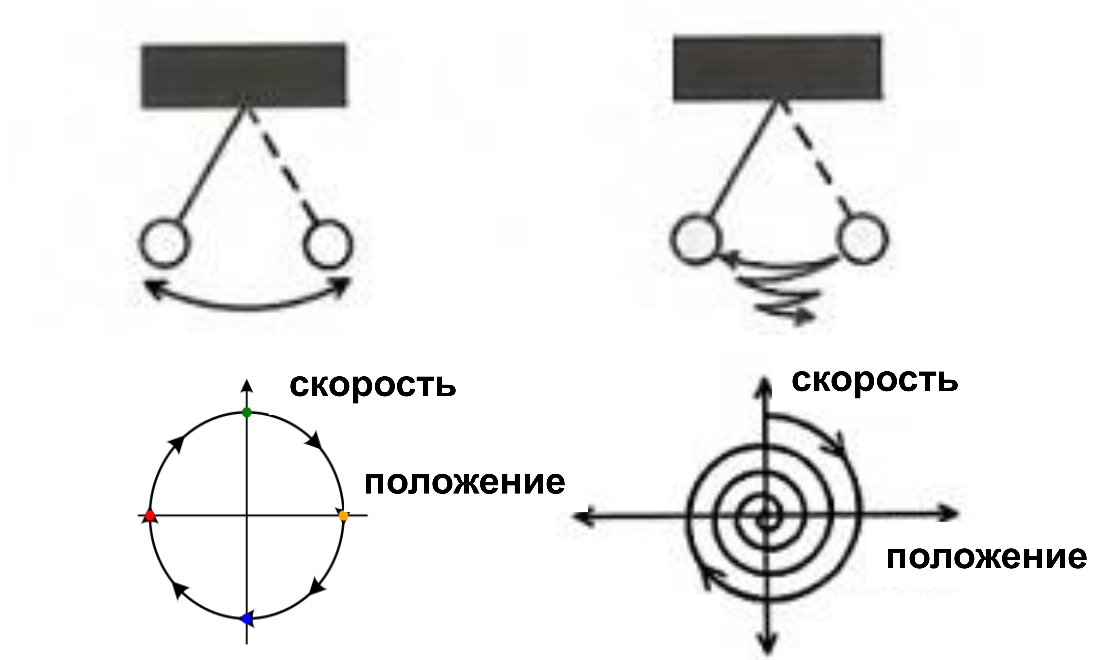
Затухающие колебания (***устойчивый фокус***)

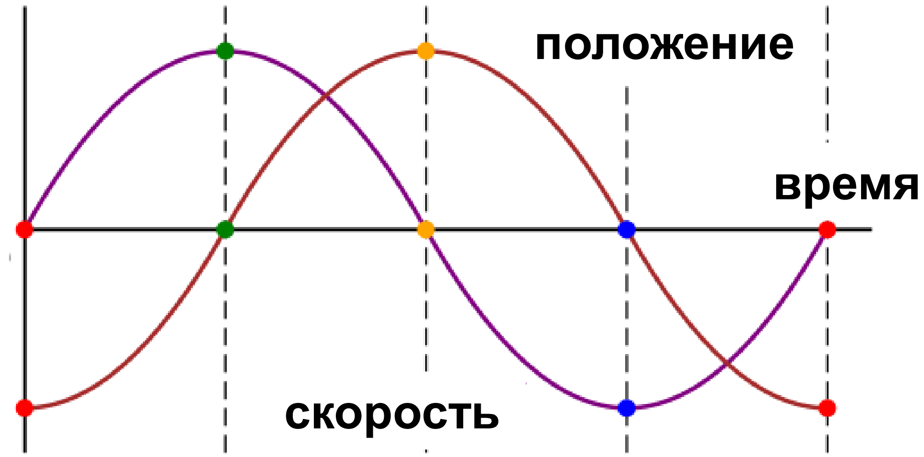
Незатухающие колебания (***устойчивый предельный цикл***)

Что общего между маятником, химической реакцией и взаимодействием видов?



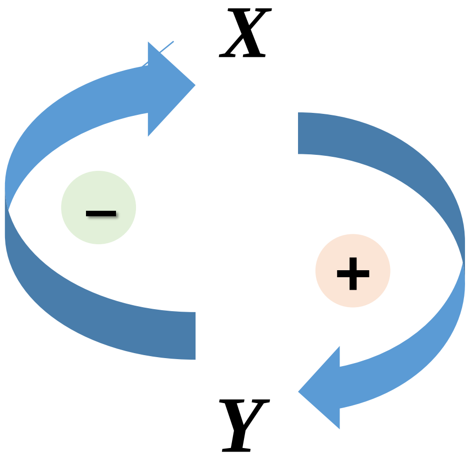
Положительная и отрицательная обратные связи





Линеаризованная система

$$\frac{dx}{dt} = ax - by$$
$$\frac{dy}{dt} = cx - dy$$

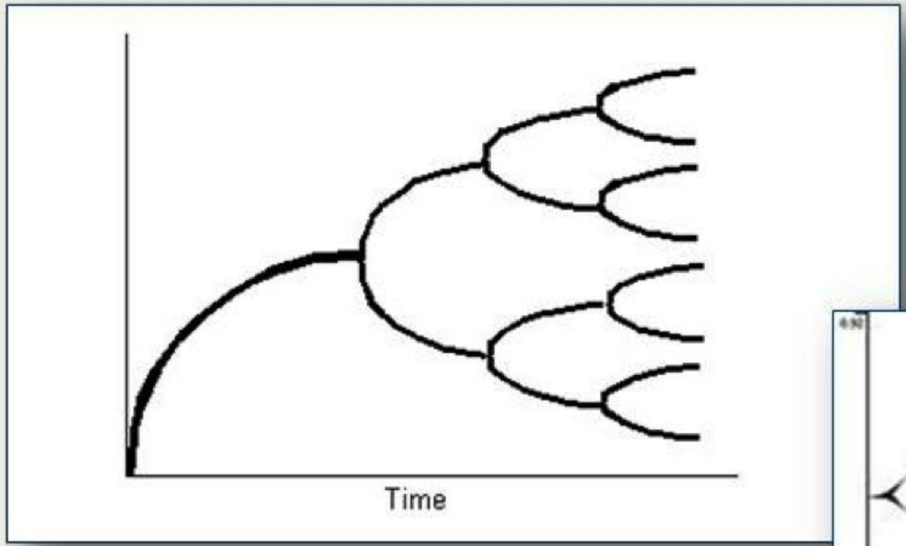


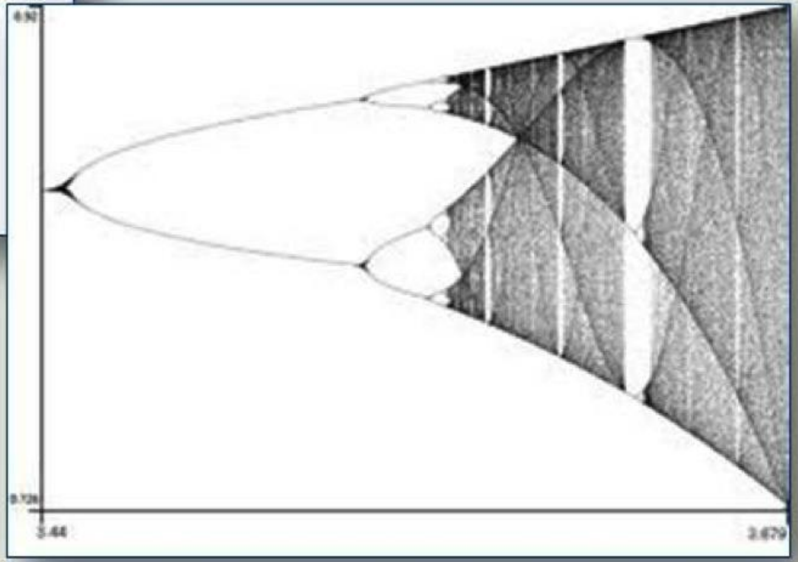
Универсальные характеристики динамических систем

- Поведение при малом отклонении от состояния равновесия (анализ методом Ляпунова)

- Переход в качественно новое состояние (бифуркация)

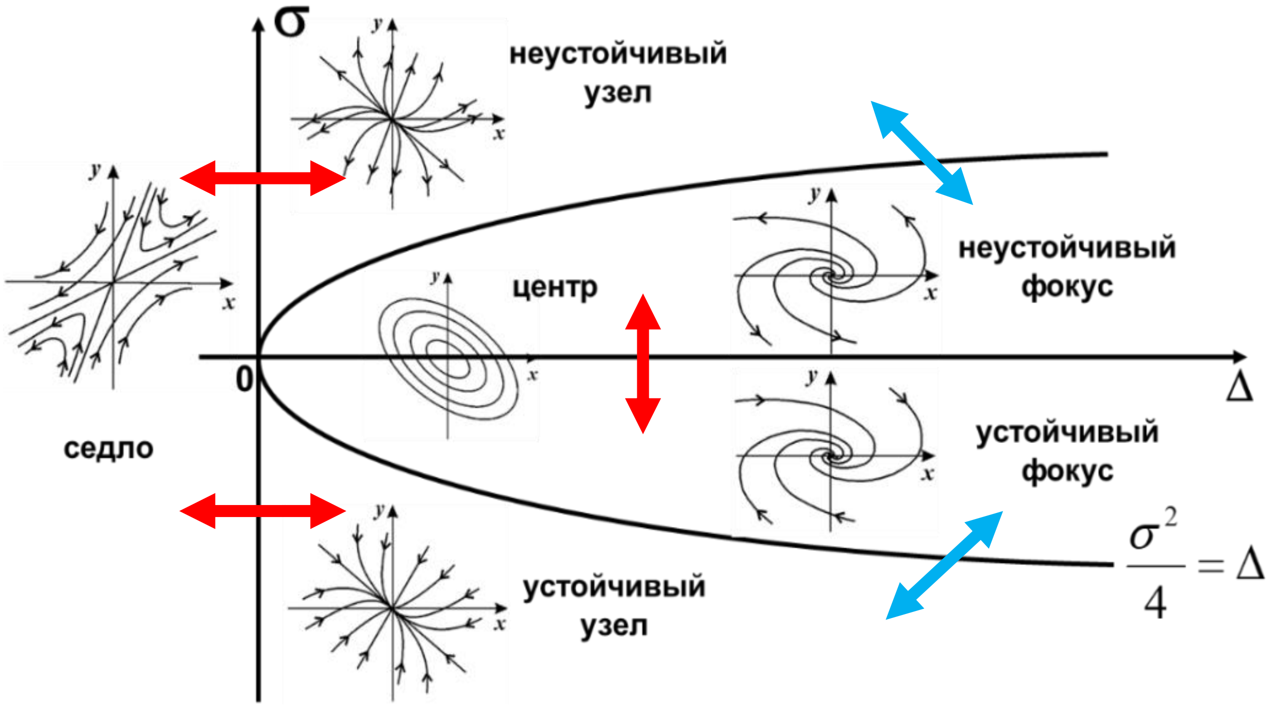
Бифуркации





Бифуркация удвоения периода, переход к хаосу

Бифуркация – качественное изменение динамического поведения системы:



Бифуркационная диаграмма

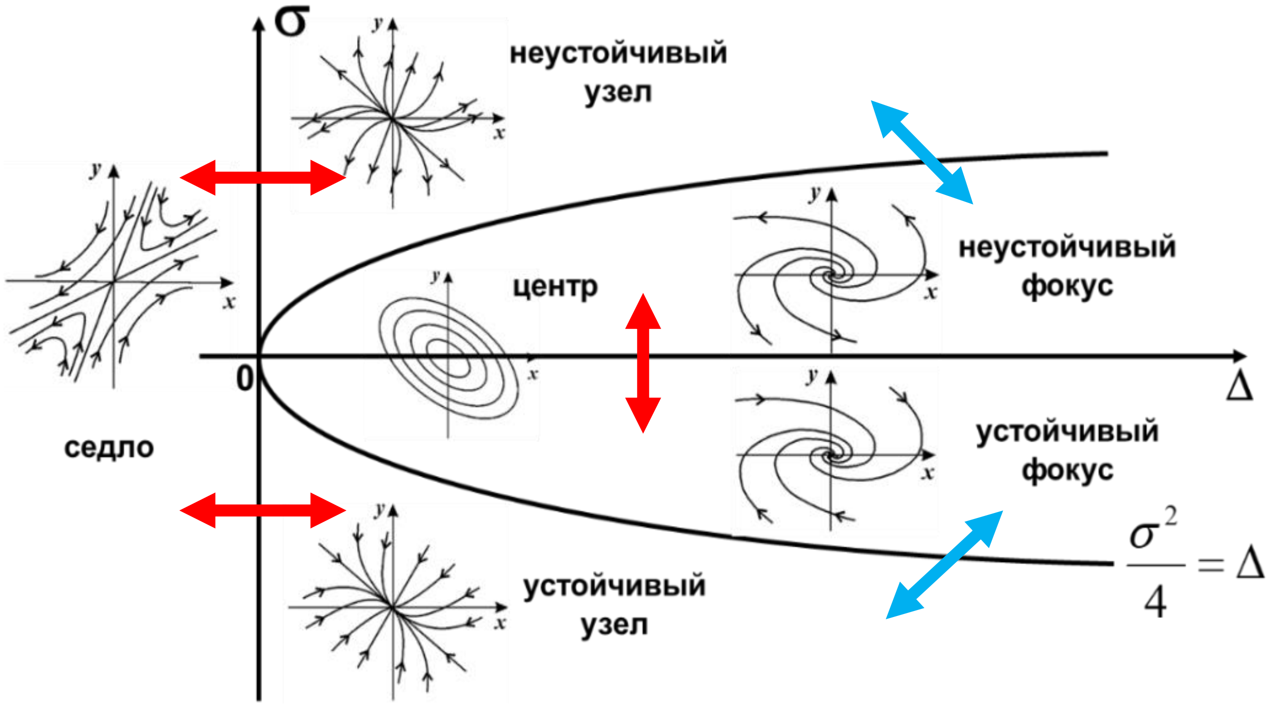
Бифуркационные переходы:

седло ↔ узел
седло-узловая бифуркация

уст. фокус ↔ неуст. фокус
бифуркация рождения цикла

Не являются бифуркациями:
неуст. фокус ↔ неуст. узел
уст. фокус ↔ уст. узел

Бифуркационные переходы



Бифуркационная диаграмма

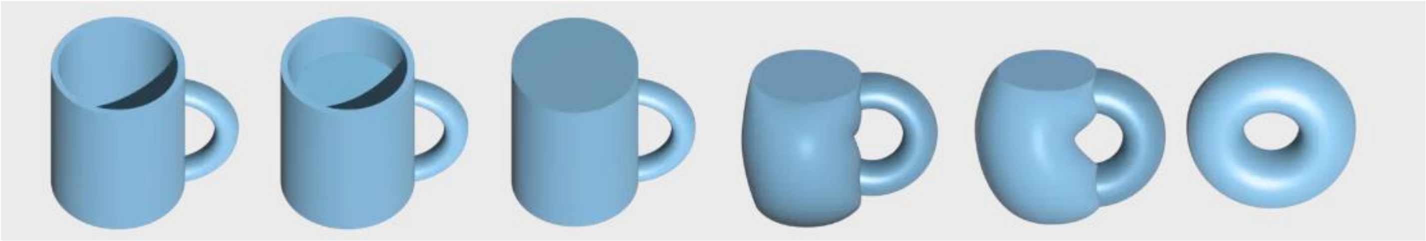
седло ↔ узел
седло-узловая бифуркация

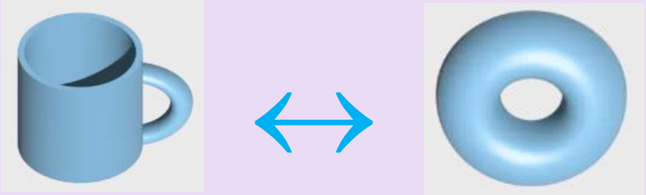
уст. фокус ↔ неуст. фокус
бифуркация рождения цикла

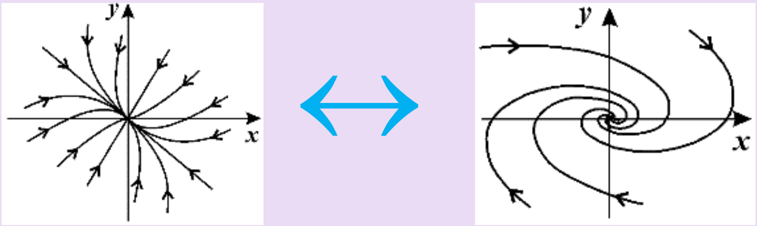
Не являются бифуркациями:
неуст. фокус ↔ неуст. узел
уст. фокус ↔ уст. узел

Почему переход фокус ↔ узел не бифуркация?

Тополо́гия — изучает свойства пространств, которые остаются неизменными при непрерывных деформациях.
С точки зрения топологии, кружка и бублик (полноторий) — неотличимы.



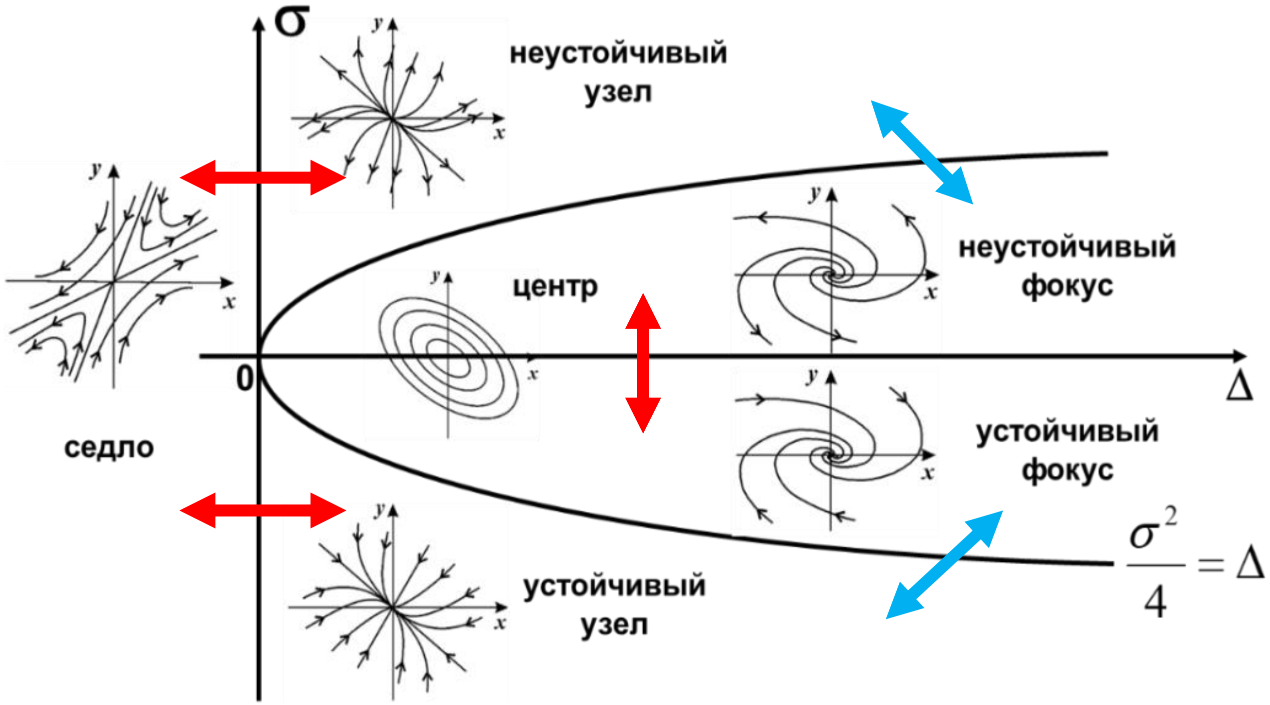




Жюль Анри Пуанкаре́
(1854-1912)

Объекты, которые получаются в результате деформации, происходящих ***без разрывов и склеиваний***, гомеоморфны (одинаковы). Топология – «резиновая геометрия»

Бифуркационные переходы



Бифуркационная диаграмма

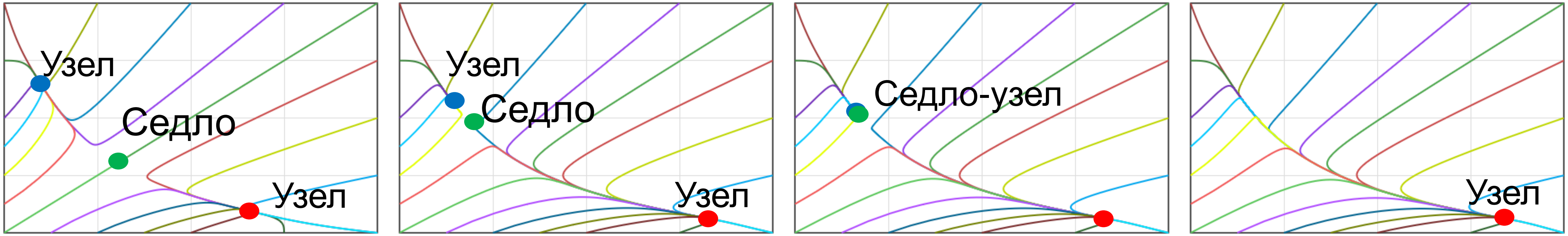
седло ↔ узел
седло-узловая бифуркация

уст. фокус ↔ неуст. фокус
бифуркация рождения цикла

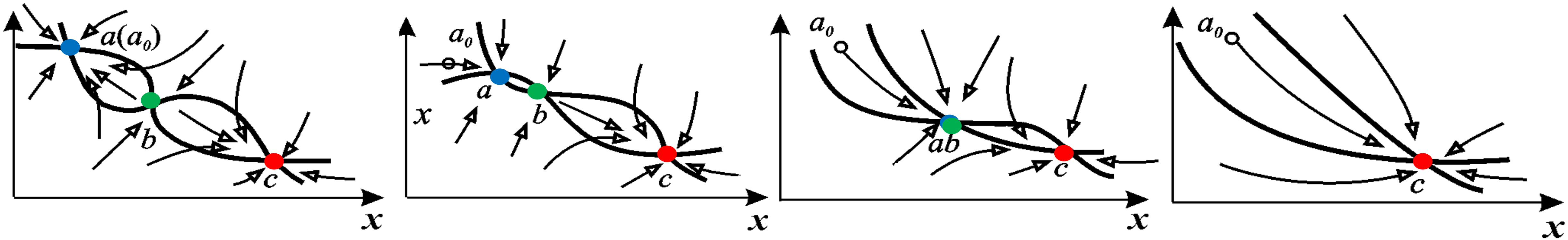
Не являются бифуркациями:
неуст. фокус ↔ неуст. узел
уст. фокус ↔ уст. узел

Седло-узловая бифуркация

Изменение фазового портрета

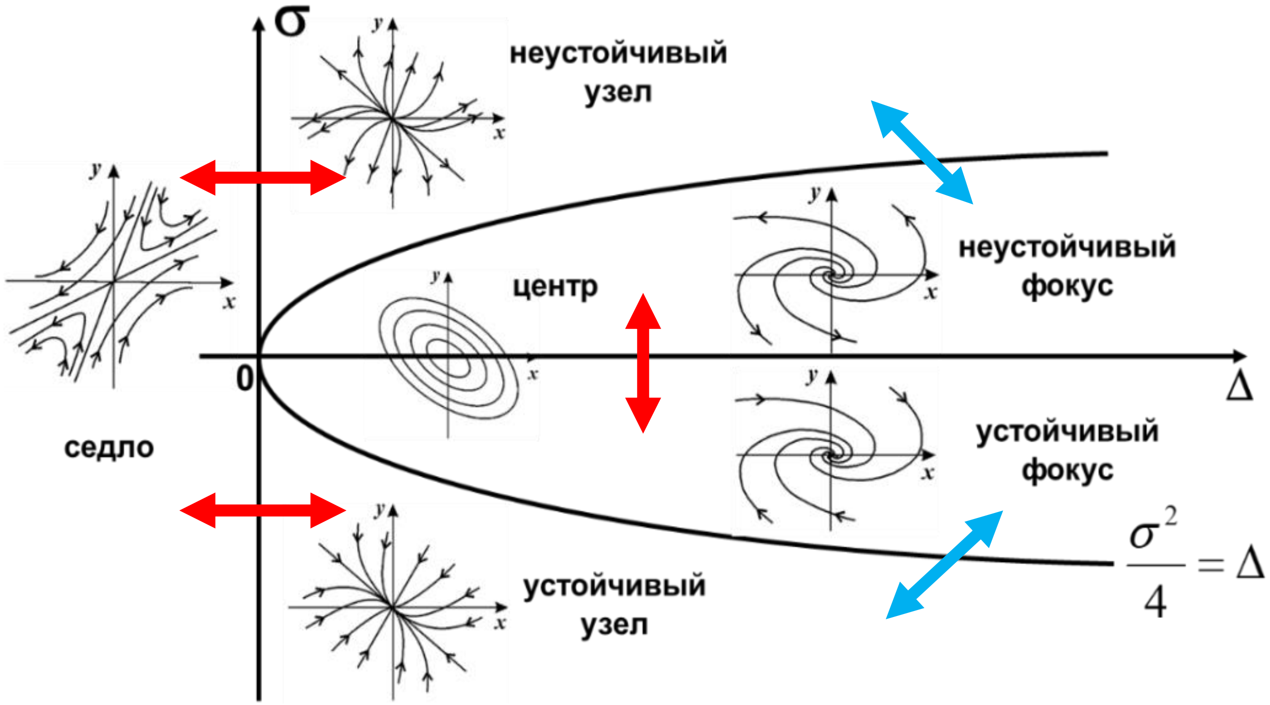


Изменение положения и формы главных изоклин



Сближение седла и узла $\rightarrow$ слияние $\rightarrow$ исчезновение

Бифуркационные переходы



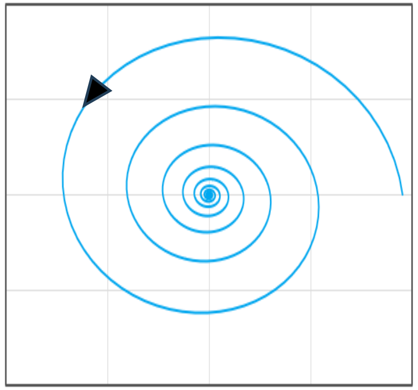
Бифуркационная диаграмма

седло ↔ узел
седло-узловая бифуркация

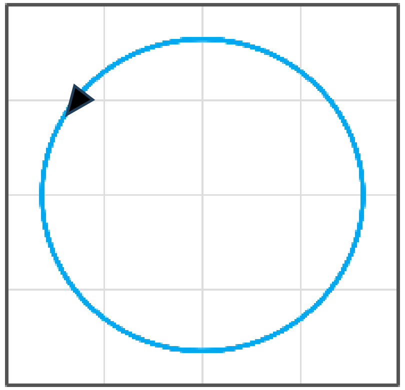
уст. фокус ↔ неуст. фокус
бифуркация рождения цикла

Не являются бифуркациями:
неуст. фокус ↔ неуст. узел
уст. фокус ↔ уст. узел

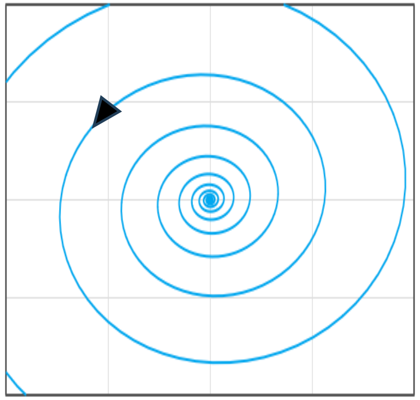
Бифуркация рождения предельного цикла



Устойчивый
фокус

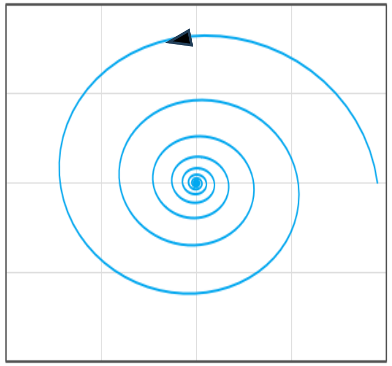


Центр

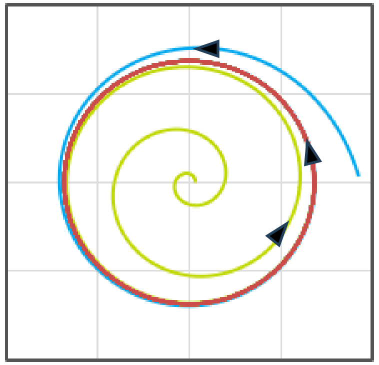


Неустойчивый
фокус

Линейная
система



Устойчивый
фокус



Неустойчивый
фокус
+
Предельный
цикл

Нелинейная
система